

# שיטות מתמטיות



## תוכן העניינים

|                                                        |           |
|--------------------------------------------------------|-----------|
| 1. מספרים מרוכבים .....                                | (ללא ספר) |
| 2. טופולוגיה במישור המרוכב .....                       | 1         |
| 3. פונקציות אנליטיות .....                             | 5         |
| 4. פונקציות אלמנטריות .....                            | 13        |
| 5. תכונות של פונקציות אנליטיות .....                   | 20        |
| 6. אינטגרציה מרוכבת .....                              | 30        |
| 7. טורים .....                                         | 45        |
| 8. נקודות סינגולריות .....                             | 54        |
| 9. משפט השארית .....                                   | 62        |
| 10. אנליזת פורייה - טורי פורייה .....                  | 81        |
| 11. אנליזת פורייה - התמרת פורייה .....                 | 105       |
| 12. מד"ר - משוואות ליניאריות מסדר שני .....            | 125       |
| 13. מד"ר - משוואות מסדר ראשון .....                    | 140       |
| 14. מד"ר - פתרון משוואות ליניאריות באמצעות טורים ..... | 162       |
| 15. מד"ר - בעיות שטורם ליוביל .....                    | 167       |
| 16. מד"ח - משוואת הגלים .....                          | (ללא ספר) |
| 17. מד"ח - משוואת החום .....                           | (ללא ספר) |
| 18. מד"ח - משוואת לפלס .....                           | (ללא ספר) |
| 19. שאלות מסכמות ברמת בחינה בפונקציות מרוכבות .....    | 172       |
| 20. שאלות מסכמות ברמת בחינה במד"ח .....                | (ללא ספר) |
| 21. שאלות מסכמות ברמת בחינה באנליזת פורייה .....       | (ללא ספר) |

# שיטות מתמטיות

פרק 1 - מספרים מרוכבים

תוכן העניינים

1. מספרים מרוכבים ..... (ללא ספר)

# שיטות מתמטיות

פרק 2 - טופולוגיה במישור המרוכב

תוכן העניינים

1. סדרות של מספרים מרוכבים.....1
2. מושגים טופולוגיים בסיסיים.....3

## סדרות של מספרים מרוכבים:

### שאלות:

(1) נתון  $z_n = \frac{1}{n} + i \left( \frac{n-2}{n} \right)$ . חשב את הגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ .

(2) נתון  $z_n = \frac{n^2 + n + 1}{3n^2 + 2} + i \left( \frac{n-1}{2n} \right)$ . חשב את הגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ .

(3) נגדיר  $z_n = (i)^{2n} n^3$ . הוכיחו כי  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$ .

(4) נגדיר  $z_n = \frac{i^n}{n}$ . הוכיחו כי  $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = 0$ .

(5) נתון  $z_n = \frac{(1+i)^n}{n}$ . חשב את הגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ .

(6) בדקו את התכנסות הסדרה  $z_n = n \cdot z^n$  כאשר  $z \in \mathbb{C}$ .

א. כאשר  $|z| \geq 1$ .

ב. כאשר  $0 < |z| < 1$ .

(7) נאמר כי סדרת מספרים מרוכבים  $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$  אם ורק אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - L| = 0$ .

הוכיחו כי אם  $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z$  ו-  $w_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} w$  אזי  $z_n + w_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z + w$ .

(8) בדקו האם הסדרות הבאות מתכנסות, אם כן חשבו את גבולן.

א.  $z_n = \frac{1+n}{1-2n} + \frac{n-10}{n^2} i$

ב.  $z_n = \cos(\pi n) + n \sin\left(\frac{1}{n}\right) i$

ג.  $z_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{-n} + \sqrt[n]{3^n + 4^n} \cdot i$

ד.  $z_n = \left( \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \right)$

## תשובות סופיות:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = i \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \frac{1}{3} + i \cdot \frac{1}{2} \quad (2)$$

(3) הוכחה.

(4) הוכחה.

(5)  $\infty$

(6) א.  $\infty$  ב. 0

(7) הוכחה.

(8) ראו סרטון.

## מושגים טופולוגיים בסיסיים:

### שאלות:

(1) שרטטו את הקבוצה  $|z-i| + |z+i| < 4$ .

א. האם היא פתוחה/סגורה?

ב. האם זה תחום?

ג. האם זה תחום פשוט קשר?

(2) שרטטו את הקבוצה, עבור  $a$  ממשי  $\operatorname{Re}\left[\frac{z-a}{z+a}\right] = 0$ .

א. האם היא פתוחה?

ב. האם זה תחום?

ג. האם זה תחום פשוט קשר?

(3) שרטטו את הקבוצה  $\operatorname{Im}\left[\frac{z-1}{z+1}\right] = 0$ .

א. האם היא פתוחה?

ב. האם זה תחום?

ג. האם זה תחום פשוט קשר?

(4) שרטטו את הקבוצה  $|z+i| = 2|z-i|$ .

א. האם היא פתוחה?

ב. האם זה תחום?

ג. האם זה תחום פשוט קשר?

(5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הראו כי  $|z \pm w|^2 = |z|^2 \pm 2\operatorname{Re}(z \cdot \bar{w}) + |w|^2$ .

ב. עבור  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  ו- $\lambda > 0$  הראו כי המשוואה  $|z - z_1| = \lambda|z - z_2|$  מתארת ישר או מעגל.

**תשובות סופיות:**

- (1) ראו סרטון.
- (2) ראו סרטון.
- (3) ראו סרטון.
- (4) ראו סרטון.
- (5) ראו סרטון.

# שיטות מתמטיות

## פרק 3 - פונקציות אנליטיות

### תוכן העניינים

|    |                        |    |
|----|------------------------|----|
| 1. | פונקציות מרוכבות       | 5  |
| 2. | גבולות מרוכבים ורציפות | 6  |
| 3. | נגזרות מרוכבות         | 7  |
| 4. | משוואות קושי-רימן      | 8  |
| 5. | פונקציות הרמוניות      | 11 |

## פונקציות מרוכבות:

### שאלות:

- (1) רשמו את הפונקציה  $f(z) = z \cdot \operatorname{Re}(z)$  , בצורה  $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ .
- (2) רשמו את הפונקציה  $f(z) = |z|^2$  , בצורה  $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ .
- (3) רשמו את הפונקציה  $f(z) = 2|z|^2 + i(\bar{z})^2$  , בצורה  $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ .
- (4) רשמו את הפונקציה  $f(z) = \frac{z}{1+|z|^2}$  , בצורה  $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ .
- (5) רשמו את הפונקציה  $f(z) = z^2 + \bar{z}$  , בצורה  $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ .
- (6) רשמו את הפונקציה  $f(x+iy) = \frac{x^3}{3} + i \cdot \left(-\frac{y^3}{3}\right)$  , בצורה  $f(z)$  , כאשר  $z = x+iy$ .

### תשובות סופיות:

- (1)  $f(z) = x^2 + i \cdot xy$
- (2)  $f(z) = x^2 + y^2 + i \cdot 0$
- (3)  $f(z) = 2[x^2 + xy + y^2] + i(x^2 - y^2)$
- (4)  $f(z) = \frac{x}{1+x^2+y^2} + i \cdot \frac{y}{1+x^2+y^2}$
- (5)  $f(z) = x^2 + x - y^2 + i \cdot (2xy - y)$
- (6)  $f = \frac{2z^3 + 6z(\bar{z})^2}{24}$

## גבולות מרוכבים ורציפות:

### שאלות:

מצאו את הגבולות הבאים (אם קיימים):

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z} = ? \quad (1)$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^4}{|z|^4} = ? \quad (2)$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} e^{\frac{-1}{z^2}} = ? \quad (3)$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} e^{\frac{-1}{z^4}} = ? \quad (4)$$

### תשובות סופיות:

$$\frac{1-ik}{1+ik} \quad (1)$$

$$\frac{(1+ik)^4}{(1+k)^2} \quad (2)$$

(3) הגבול תלוי במסלול ולכן אינו קיים.

(4) הגבול תלוי במסלול ולכן אינו קיים.

## נגזרות מרוכבות:

### שאלות:

(1) מצאו את כל הנקודות בהן הפונקציה  $f(z) = \bar{z}$  גזירה. הראו עפ"י הגדרת הנגזרת כי  $f(z) = \bar{z}$  אינה גזירה ב- $z_0$  לכל  $z_0 \in \mathbb{C}$ .

(2) מצאו את כל הנקודות בהן הפונקציה  $f(z) = \operatorname{Re}(z)$  גזירה.

(3) מצאו את כל הנקודות בהן הפונקציה  $f(z) = |z|^2$  גזירה.

(4) הוכיחו את משפט לופיטל:  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{g(z) - g(z_0)}$

### תשובות סופיות:

- (1) הפונקציה לא גזירה.  
הגבול תלוי במסלול ולכן אינו קיים.
- (2) הפונקציה לא גזירה.
- (3) בראשית הצירים, והנגזרת שלה היא 0.
- (4) הוכחה.

## משוואות קושי-רימן:

### שאלות:

(1) הראו כי  $f(z) = z^2 + \text{Im}(z)$  אינה גזירה לכל  $z$ .

(2) הראו כי  $f(z) = xy + i(x^2 + y^2)$  אינה גזירה בכל הנקודות בהן  $z \neq 0$ , אך כן גזירה בנקודה  $z = 0$  (לפי הגדרה).

(3) מצאו מספרים ממשיים  $a, b$  כך שהפונקציה  $f(z) = e^{ax} \cos(3y) + i(-e^{-3x} \sin(by))$  תהיה גזירה בכל נקודה.

(4) נתון כי  $f(z) = \frac{z}{z}$  אינה רציפה ב  $z = 0$ .

מצאו את כל הנקודות (אם קיימות) בהן הפונקציה גזירה.

### משפט קושי-רימן: הוכחה (הפתרון בסרטון)

אם  $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$  גזירה ב-  $z_0 = x_0 + iy_0$ ,

אז מתקיימות משוואות קושי-רימן בנקודה זו, כלומר:

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0)$$

$$u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0)$$

(5) נניח כי  $f(z)$  גזירה בתחום  $D$ , ונניח כי  $\text{Re}\{f(z)\} = 0$  לכל  $z \in D$ . הוכיחו כי  $f(z)$  קבועה.

(6) נניח כי  $f(z)$  פונקציה גזירה שאינה קבועה בתחום  $D$ .

נגדיר  $g(z) = \overline{f(z)}$  לכל  $z \in D$ .

הוכיחו כי  $g(z)$  אינה גזירה בכל  $D$ .

(7) נתונה הפונקציה  $f(z) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{z^4}} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$  הוכיחו את הטענות הבאות:

א. הפונקציה אינה רציפה בראשית.

ב. משוואות קושי-רימן מתקיימות בראשית.

(8) נניח כי  $f(z)$  אנליטית בתחום  $H^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$ .

הוכיחו כי  $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$  אנליטית בתחום  $H^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) < 0\}$ .

(9) הוכיחו כי  $f(z) = e^{\operatorname{Re}(z)}$  אינה גזירה בשום נקודה במישור המרוכב.

(10) נתונה הפונקציה  $f(z) = cx^2 - xy + ixy^2$ , כאשר  $c$  קבוע מרוכב כלשהו.

נתון כי  $f(z)$  גזירה בנקודה  $1+i$ .

מצאו את הקבוע  $c$  ואת כל הנקודות בהן הפונקציה גזירה.

(11) נתונה הפונקציה  $f(z) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + i \cdot \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ .

קבעו האם הפונקציה  $f(z)$  אנליטית בחצי המישור הימני  $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$ .

(12) נתונה הפונקציה  $f(z) = e^{\frac{x^2-y^2}{2}} [\cos(xy) + i \cdot a \sin(xy)]$ .

עבור אילו ערכי  $a$  זוהי פונקציה הולומורפית (אנליטית) בכל המישור?

(13) נניח כי  $g(z)$  הולומורפית בתחום  $\overline{D(0,1)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ ,

ומקיימת  $\forall |z| \leq 1 \quad |g(z)| = 1$ .

הוכיחו כי  $g(z)$  קבועה.

הדרכה: ניתן לכתוב את  $g(z)$  באופן הבא:  $g(z) = e^{i \cdot h(x,y)}$ .

(14) נניח כי  $R > 0$  ונתונה הפונקציה  $f: D(0,R) \rightarrow \mathbb{C}$  גזירה בכל התחום.

נגדיר:  $g(z) = \overline{f\left(\frac{R}{\bar{z}}\right)}$ .

מצאו תחום בו  $g(z)$  מוגדרת, ובדקו אם היא גזירה שם.

## תשובות סופיות:

$$u'_y = -2y + 1, \quad v'_x = 2y \quad (1)$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$a = -3, \quad b = 3 \quad (3)$$

$$x = 0, \quad y = 0 \quad (4)$$

(5) הוכחה

(6) הוכחה

(7) א. הוכחה ב. הוכחה

(8) הוכחה

(9) הוכחה

$$y = 0, \quad y = 1, \quad y = 0.5$$

$$x = 0, \quad x = 1, \quad x = 0.25, \quad c = a + i \cdot b = \frac{3}{2} \quad (10)$$

$$z = 0, \quad z = 1 + i, \quad z = 0.25 + 0.5 \cdot i$$

$$u_x = \frac{x}{x^2 + y^2}; \quad u_y = \frac{y}{x^2 + y^2} \quad (11)$$

$$a = 1 \quad (12)$$

(13) הוכחה

$$A = \{z \mid |z| > 1\} \quad (14)$$

## פונקציות הרמוניות:

### שאלות:

- (1) הראו כי הפונקציה  $x^3 - 3xy^2$ , היא פונקציה הרמונית בכל המישור.
- (2) הראו כי הפונקציה  $x^2 - y^2$ , היא פונקציה הרמונית בכל המישור, ומצאו לה צמודה הרמונית.
- (3) הראו כי הפונקציה  $f(z) = xy + i(x^2 + y^2)$ , היא פונקציה גזירה בראשית-הצירים, אך החלק המדומה שלה אינו פונקציה הרמונית. האם  $f(z)$  הולומורפית בראשית?
- (4) הראו כי הפונקציה  $u(x, y) = \sin(x) \cosh(y)$ , היא פונקציה הרמונית בכל המישור, ומצאו את הצמודה ההרמונית שלה  $v(x, y)$  המקיימת  $v(0, 0) = 2$ .  
רמז:  $f(z) = \sin(z)$ .
- (5) הראו כי הפונקציה  $u(x, y) = \cos(x) \sinh(y)$ , היא פונקציה הרמונית בכל המישור, ומצאו פונקציה הולומורפית כך שמתקיים  $u(x, y) = \operatorname{Re}\{f\}$ .
- (6) הראו כי הפונקציה  $v(x, y) = e^y \sin(x)$ , היא פונקציה הרמונית במישור, מצאו לה פונקציה צמודה הרמונית  $u(x, y)$  ופונקציה שלמה  $f(z)$ , כך שמתקיים:  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ .
- (7) הראו כי הפונקציה  $u(r, \theta) = \left(r + \frac{1}{r}\right) \cos(\theta)$ , היא פונקציה הרמונית בתחום  $r \neq 0$ .  
רמז:  $u(r, \theta)$  תקרא הרמונית אם היא מקיימת  $r^2 u_{rr}'' + r u_r' + u_{\theta\theta}'' = 0$ .
- (8) נתון כי  $u(r, \theta) = \left(r + \frac{1}{r}\right) \cos(\theta)$  היא פונקציה הרמונית בתחום  $r \neq 0$ . מצאו לה צמודה הרמונית בתחום זה.

(9) הוכיחו כי  $u(x, y) = 2x - x^3 + 3xy^2$ , היא פונקציה הרמונית ומצאו לה צמודה הרמונית.

(10) תהי  $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$  פונקציה שלמה. הוכיחו כי  $g(x, y) = u(x, y)^2 - v(x, y)^2$  פונקציה הרמונית.

(11) תהי  $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$  פונקציה שלמה. הוכיחו כי  $g(x, y) = \sin[u(x, y)] \cdot \cosh[v(x, y)]$  פונקציה הרמונית.

(12) האם קיימות פונקציות הרמוניות מהצורה  $u(x, y) = \varphi\left(\frac{x^2 + y^2}{x}\right)$

(כאשר  $\varphi \in C^2$  פונקציה לא ידועה)?  
אם כן, מצאו אותן.

(13) האם קיימות פונקציות הרמוניות מהצורה  $u(x, y) = \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$

(כאשר  $\varphi \in C^2$  פונקציה לא ידועה)?  
אם כן, מצאו אותן.

(14) הראו כי הפונקציה  $\sinh(x) \cos(y)$  היא פונקציה הרמונית בכל המישור, ומצאו את הצמודה ההרמונית שלה.

## תשובות סופיות:

ראה פתרונות מלאים בסרטוני הוידאו.

# שיטות מתמטיות

## פרק 4 - פונקציות אלמנטריות

### תוכן העניינים

- 1. סינוס מרוכב..... 13
- 2. קוסינוס מרוכב..... 14
- 3. אקספוננט מרוכב..... 15
- 4. העתקות אלמנטריות..... 16
- 5. לוגריתם מרוכב, פונקציות רב-ערכיות ושורשים..... 17

## סינוס מרוכב:

### שאלות:

- (1) פתרו את המשוואה  $\sin(z) = 2$ .
- (2) הוכיחו כי  $\sin(z) = \sin(x + iy) = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y)$ .
- (3) פתרו את המשוואה  $\sin(z) = 5$ .

### תשובות סופיות:

- (1) כל הפתרונות הם מהצורה הבאה:  $z_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n + i \ln(2 \pm \sqrt{3})$ , כאשר  $n$  מספר שלם.
- (2) הוכחה.
- (3)  $z_k = \frac{\pi}{2} + 2\pi k - i \ln(5 \pm 2\sqrt{6})$

## קוסינוס מרוכב:

### שאלות:

(1) הוכיחו כי  $\cos(z) = \cos(x + iy) = \cos(x) \cosh(y) - i \sin(x) \sinh(y)$ .

(2) פתרו את המשוואה  $\cos(z) = 2$ .

(3) האם  $|\cos(z)| \leq 1$  לכל  $z$ ?

(4) פתרו את המשוואה  $\cos(\pi z) + \frac{3}{4}i = 0$ .

(5) הוכיחו כי לכל  $z \in \mathbb{C}$  מתקיים  $|\cos(z)| \leq \frac{e^y + e^{-y}}{2}$  כאשר  $y = \operatorname{Im}(z)$ .

(6) פתרו את המשוואה  $\tan(z) = \frac{i}{3}$ .

### תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

(2)  $z_n = 2\pi n + i \ln(2 \pm \sqrt{3})$

(3) לא.

(4)  $z_k = -\frac{1}{2} + 2k - i \frac{1}{\pi} \ln(2)$

(5) הוכחה.

(6)  $z_k = \pi k + i \frac{1}{2} \ln(2)$

## אקספוננט מרוכב:

### שאלות:

- (1) פתרו את המשוואה  $e^z = -1$ .
- (2) הוכיחו כי לכל  $x$  ממשי מתקיים  $|e^{ix}| = 1$ .
- (3) ענו על הסעיפים הבאים:  
א. הראו כי אם  $\operatorname{Im}(z) \geq 0$  אז  $|e^{iz}| \leq 1$ .  
ב. הראו כי  $|e^z| = 1$  אם ורק אם  $\operatorname{Re}(z) = 0$ .
- (4) פתרו את המשוואה  $e^z = 1$ .
- (5) פתרו את המשוואה  $e^z = i$ .
- (6) פתרו את המשוואה  $e^z = 1 + i$ .
- (7) האם הפונקציה  $f(z) = e^z$  היא חח"ע?

### תשובות סופיות:

- (1)  $z = i \cdot \pi [2n + 1]$
- (2)  $\sqrt{\cos^2(x) + \sin^2(x)} = 1$
- (3) א.  $|e^{iz}| = e^{-y} = \frac{1}{e^y} \leq \frac{1}{e^0} = 1$ . ב. הוכחה.
- (4)  $z_k = 2\pi i k \quad k \in \mathbb{Z}$
- (5)  $z_k = i\pi \left( 2k + \frac{1}{2} \right) \quad k \in \mathbb{Z}$
- (6)  $z_k = \frac{1}{2} \ln(2) + i\pi \left( 2k + \frac{1}{4} \right) \quad k \in \mathbb{Z}$
- (7) לא.

## העתקות אלמנטריות:

### שאלות:

(1) מצאו את התמונה  $f(U)$  של התחום  $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$

תחת ההעתקה  $f(z) = z + 1$ .

(2) מצאו את התמונה  $f(U)$  של התחום  $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$

תחת ההעתקה  $f(z) = 5z$ .

(3) מצאו את התמונה  $f(U)$  של התחום  $U = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Arg}(z) = \frac{\pi}{4}\right\}$

תחת ההעתקה  $f(z) = z^3$ .

(4) מהי תמונת התחום  $A = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Im}(z) < \pi\}$  תחת העתקה  $f(z) = e^z$ .

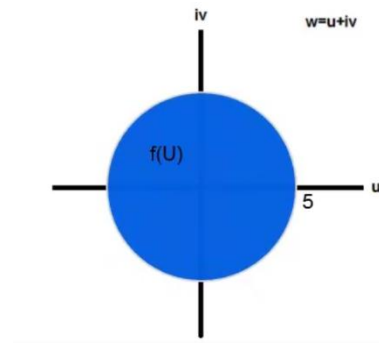
(5) מהי תמונת התחום  $A = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Im}(z) < 2\pi\}$  תחת העתקה  $f(z) = e^z$ .

(6) מהי תמונת התחום  $A = \left\{z \in \mathbb{C} \mid -\infty < \operatorname{Re}(z) < 0, 0 < \operatorname{Im}(z) < \frac{\pi}{2}\right\}$  תחת העתקה  $f(z) = e^z$ .

### תשובות סופיות:

$$(1) |w-1| < 1$$

$$(2) w = u + iv$$



$$(3) \frac{3\pi}{4} \approx 135^\circ$$

$$(4) f(z) = e^x e^{iy} \equiv \operatorname{Re}^{i\alpha} \quad 0 < R < \infty \quad 0 < \alpha < \pi$$

$$(5) f(z) = e^x e^{iy} \equiv \operatorname{Re}^{i\alpha} \quad 0 < R < \infty \quad 0 < \alpha < 2\pi$$

$$(6) f(z) = e^x e^{iy} \equiv \operatorname{Re}^{i\alpha} \quad 0 < R < 1 \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

## לוגריתם מרוכב, פונקציות רב-ערכיות ושורשים:

### שאלות:

(1) חשבו את הגדלים הבאים :

א.  $\text{Arg}(1+i)$

ב.  $\text{Arg}\left(2e^{i\frac{3\pi}{2}}\right)$

(2) חשבו את הגדלים הבאים :

א.  $\text{Log}(1+i)$

ב.  $\text{Log}\left(2e^{i\frac{3\pi}{2}}\right)$

(3) מצאו את כל הערכים האפשריים של  $\sqrt{i}$ .

(4) מצאו את כל הערכים האפשריים של  $i^i$ .

(5) מצאו את כל הערכים האפשריים של  $2^{\frac{1}{9} + \frac{i}{50}}$ .

(6) חשבו את הערך  $(2+2i)^{5i}$  עבור 3 ענפים שונים לבחירתכם. כמה תשובות אפשריות יש לערך זה.

(7) מצאו את תמונת התחום  $A = \{z = re^{i\theta} \mid R_1 < r < R_2, -\pi < \theta < \pi\}$  תחת העתקה  $\text{Log}(z)$  (הענף הראשי של הלוג).

(8) מצאו תחום בו הפונקציה  $\log\left(\frac{z-a}{z-b}\right)$  אנליטית. כאשר  $a, b \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq b$ .  
הערה: תרגיל זה דורש ידע בהעתקות מוביוס.

(9) הראו כי  $|a^z| = a^{\text{Re}(z)}$  עבור  $a$  ממשי חיובי בתחום  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0)$  כאשר פונקציית החזקה מוגדרת ע"י ענף הראשי של הלוג, כלומר:  $a^z = e^{z \cdot \text{Log}(a)}$ .

**(10)** הוכיחו ישירות כי העתקה  $\sqrt{z}$  איננה רציפה בתחום  $\mathbb{C}$  אם מגדירים את  $\sqrt{z}$  באופן הבא:  $\sqrt{z} = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$  כאשר  $z = re^{i\theta}$  ,  $\theta \in [0, 2\pi]$  .

**(11)** מצאו את כל הערכים האפשריים של  $\log(\log(-1))$  .

**(12)** נניח כי  $\log(z)$  זה ענף רציף של הלוגריתם בתחום  $\mathbb{C} \setminus \{z = x + iy, x \geq 0, y = \sin(x)\}$  ,  $\log(1) = 0$  , ונניח שבענף זה מתקיים  $\log(i)$  ,  $\log(-i)$  ,  $\log\left(\frac{5\pi}{2}\right)$  ,  $\log\left(\frac{3\pi}{2}\right)$  : חשבו בענף זה את הערכים:  $\log(-1)$  ,  $\log(i)$  ,  $\log(-i)$  ,  $\log\left(\frac{5\pi}{2}\right)$  ,  $\log\left(\frac{3\pi}{2}\right)$  .

**(13)** נגדיר  $\log_\alpha(z) = \ln|z| + i \cdot \arg(z)$  כאשר  $\alpha - 2\pi < \arg(z) \leq \alpha$  .  
 א. חשבו את הערכים:  $\log_{2\pi}(1)$  ,  $\log_\pi(1)$  ,  $\log_0(1)$  .  
 ב. מצאו את התמונה של  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  תחת ההעתקה  $\log_\pi(z)$  .  
 ג. מצאו את התמונה של  $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$  תחת ההעתקה  $\log_0(z)$  .

**(14)** יהיו  $z_1, \dots, z_n$  מספרים מרוכבים כך ש-  $\operatorname{Re}(z_k) > 0$  לכל  $1 \leq k \leq n$  וגם  $\operatorname{Re}(z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_k) > 0$  לכל  $1 \leq k \leq n$  .  
 הוכיחו כי  $\operatorname{Log}(z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n) = \operatorname{Log}(z_1) + \dots + \operatorname{Log}(z_n)$  , כאשר  $\operatorname{Log}(z)$  זה הענף הראשי של הלוגריתם.

**(15)** יהי  $U = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  ויהי  $y > 0$  . חשבו את הגבול  $\lim_{y \rightarrow 0} [\log(a + iy) - \log(a - iy)]$  .  
 עבור  $a > 0$  ועבור  $a < 0$  .

**(16)** הוכיחו שלא קיים ענף אנליטי של  $\sqrt{z}$  ב-  $\mathbb{C}$  . כלומר, הראו שלא קיימת פונקציה אנליטית  $h(z)$  ב-  $\mathbb{C}$  כך ש-  $h^2(z) = z$  לכל  $z \in \mathbb{C}$  .

**(17)** הוכיחו שלא קיים ענף אנליטי של  $\sqrt[n]{z}$  ב-  $|z| < 1$  לכל  $n \geq 2$  .

**(18)** נניח כי  $f(z)$  ,  $g(z)$  הם שני ענפים אנליטיים של הלוג בקבוצה פתוחה וקשירה  $U$  . הוכיחו כי קיים קבוע  $k$  שלם כך ש-  $f(z) - g(z) = 2\pi i k$  לכל  $z \in U$  .

## תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } \frac{\pi}{4} \quad \text{ב. } -\frac{\pi}{2}$$

$$(2) \quad \text{א. } \ln(\sqrt{2}) + i\frac{\pi}{4} \quad \text{ב. } \ln(2) - \frac{\pi}{2}$$

$$(3) \quad e^{\frac{\pi}{4}i}, k=0; \quad e^{\frac{5\pi}{4}i}, k=1$$

$$(4) \quad \left\{ e^{-\pi \frac{4k+1}{2}} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$(5) \quad \left\{ 2^{\frac{1}{9}} e^{-\frac{2\pi k}{50}} e^{i\left(\frac{\ln(2)}{50} + \frac{2\pi k}{9}\right)} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$(6) \quad \left\{ e^{-5\frac{\pi}{4}} e^{i5\ln(\sqrt{8})}, e^{-5\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi\right)} e^{i5\ln(\sqrt{8})}, e^{-5\left(\frac{\pi}{4} - 2\pi\right)} e^{i5\ln(\sqrt{8})}, \dots \right\}$$

$$(7) \quad \ln(r) + i \cdot \theta$$

$$(8) \quad \frac{z-a}{z-b} \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0)$$

$$(9) \quad a^{\operatorname{Re}(z)}$$

$$(10) \quad \text{הוכחה.}$$

$$(11) \quad \ln(\pi + 2\pi k) + i \cdot \left( \frac{\pi}{2} + 2\pi m \right) \quad m \in \mathbb{Z}, k \geq 0$$

$$\ln(-\pi - 2\pi k) + i \left( -\frac{\pi}{2} + 2\pi m \right) \quad m \in \mathbb{Z}$$

$$(12) \quad -\pi i, -\frac{3\pi}{2}i, -\frac{\pi}{2}i, \ln\left(\frac{5\pi}{2}\right), \ln\left(\frac{3\pi}{2}\right) - 2\pi i$$

$$(13) \quad \text{א. } 2\pi i, 0, 0 \quad \text{ב. } \ln(r) + i\theta, \quad -\infty < \ln(r) < \infty, \quad \theta < r < \infty$$

$$\ln(r) + i\theta, \quad -\infty < \ln(r) < \infty, \quad 0 < \theta \leq 2\pi$$

$$(14) \quad \text{הוכחה.}$$

$$(15) \quad 2\pi i$$

$$(16) \quad \text{הוכחה.}$$

$$(17) \quad \text{הוכחה.}$$

$$(18) \quad \text{הוכחה.}$$

# שיטות מתמטיות

פרק 5 - תכונות של פונקציות אנליטיות

תוכן העניינים

|                                  |    |
|----------------------------------|----|
| 1. משפט ליוביל.....              | 20 |
| 2. עקרון היחידות.....            | 23 |
| 3. עקרון המקסימום והמינימום..... | 26 |

## משפט ליוביל:

**רקע:**

**משפט:**

אם  $f(z)$  פונקציה שלמה (אנליטית בכל  $\mathbb{C}$ ) וחסומה ב- $\mathbb{C}$  (כלומר קיים  $M > 0$  כך ש- $|f(z)| < M \quad (\forall z \in \mathbb{C})$  אז  $f(z)$  פונקציה קבועה.

**שאלות:**

(1) מצאו פונקציה שלמה, המקיימת את אי-השוויון  $|\sin(z) - z \cdot f(z)| < 2 \quad \forall z \in \mathbb{C}$ .

(2) הוכיחו כי קיים  $z \in \mathbb{C}$  עבורו  $|\cos(z)| > 1$  ע"י שימוש במשפט ליוביל.

(3) נתונה פונקציה שלמה  $f(z) = u + iv$ , המקיימת  $v \leq 0$  (לכל  $z$ ).

הוכיחו כי  $f(z)$  קבועה.

רמז: התבוננו בפונקציה  $e^{-i \cdot f(z)}$ .

(4) מצאו את כל הפונקציות השלמות  $f(z) = u + iv$ , המקיימות  $u \leq 0$  (לכל  $z$ ).

רמז: התבוננו בפונקציה  $e^{f(z)}$ .

(5) מצאו את כל הפונקציות השלמות  $f(z) = u + iv$ , המקיימות  $u \geq 0$  (לכל  $z$ ).

רמז: התבוננו בפונקציה  $e^{-f(z)}$ .

(6) מצאו את כל הפונקציות השלמות  $f(z) = u + iv$ , המקיימות  $v \geq 0$  (לכל  $z$ ).

(7) נתונה פונקציה שלמה  $f(z)$ , המקיימת  $|f(z)| \geq 1$  לכל  $z$ .

הוכיחו כי  $f(z)$  קבועה.

רמז: התבוננו בפונקציה  $\frac{1}{f(z)}$ .

(8) מצאו את כל הפונקציות השלמות  $f(z) = u + iv$ , המקיימות  $v \leq 0$  (לכל  $z$ ).

רמז: התבוננו בפונקציה  $e^{-i \cdot f(z)}$ .

(9) הוכיחו כי כל הפונקציות השלמות  $f(z)$ , המקיימות  $\forall z \in \mathbb{C} \quad |f(z)| \leq 4 + 5|z|^{\frac{4}{5}}$  הן פונקציות קבועות.

(10) נתון כי  $f(z)$  שלמה, המקיימת  $\forall z \in \mathbb{C} \quad |f(z)| \geq e^{\operatorname{Re}(z)}$ . הוכיחו שקיים קבוע  $C$  מרוכב, כך ש- $f(z) = C \cdot e^z$ .

(11) נתון כי  $f(z)$  שלמה, המקיימת  $f(0) = 0$  ו- $f(1) = 1$ . הוכיחו שקיים  $C$  מרוכב, כך ש- $|f(c)| > 2$ .

(12) נתון כי  $f(z)$  שלמה, המקיימת  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 2$ . הוכיחו כי  $f(z) \equiv 2$ .

(13) נתון כי  $f(z) = u + iv$  שלמה המקיימת  $u \cdot v \geq 0$  לכל  $z \in \mathbb{C}$ . הוכיחו כי  $f(z)$  פונקציה קבועה.

(14) נתון כי  $f(z) = u + iv$  שלמה המקיימת  $u \geq v$  לכל  $z \in \mathbb{C}$ . הוכיחו כי  $f(z)$  פונקציה קבועה.

(15) האם קיימת פונקציה אנליטית בתחום  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  כך ש-

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad |f(z)| \geq \frac{1}{\sqrt{|z|}}$$

הערה: ניתן להשתמש במשפט רימן אם  $g(z)$  אנליטית בסביבה נקובה של  $z_0$  וחסומה שם אז היא אנליטית גם ב- $z_0$ .  
(הכוונה שניתן להגדיר אותה ב- $z_0$  כך שתהיה אנליטית שם).

(16) הוכח או הפרד: אם  $f(z)$  שלמה שאינה קבועה אז קיים  $z \in \mathbb{C}$  כך ש- $\operatorname{Re} f(z) > |f(z)|^2$ .

(17) הוכיחו כי אם  $f(z)$  שלמה שאינה קבועה התמונה  $f[\mathbb{C}]$  צפופה ב- $\mathbb{C}$ .  
הגדרה: קבוצה  $A \subseteq \mathbb{C}$  תקרא צפופה ב- $\mathbb{C}$  אם ורק אם לכל  $z_0 \in \mathbb{C}$  ולכל  $R > 0$  מתקיים  $D(z_0, R) \cap A \neq \emptyset$ .

- (18) ידוע כי קיימת פונקציה  $T(z): \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \rightarrow D(0,1)$  אנליטית המקיימת  $T'(z) \neq 0$  לכל  $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ . הוכיחו כי כל פונקציה שלמה  $f(z)$  המקיימת  $f(z) \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  לכל  $z \in \mathbb{C}$  הינה פונקציה קבועה.
- (19) נניח כי  $f(z)$  שלמה ומקיימת  $f(z) = f(z+1) = f(z+i)$  לכל  $z \in \mathbb{C}$ . הוכיחו כי  $f(z)$  קבועה.

### תשובות סופיות

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\sin(z)}{z} & z \neq 0 \\ 1 & z = 0 \end{cases} \quad (1)$$

(2) הוכחה.

(3) הוכחה.

(4) ראו וידאו.

(5) ראו וידאו.

(6) ראו וידאו.

(7) הוכחה.

(8) ראו וידאו.

(9) הוכחה.

(10) הוכחה.

(11) הוכחה.

(12) הוכחה.

(13) הוכחה.

(14) הוכחה.

(15) לא קיימת.

(16) הוכחה.

(17) הוכחה.

(18) הוכחה.

(19) הוכחה.

## עקרון היחידות:

### שאלות:

- (1) הוכיחו כי אם  $f(z)$  שלמה ומקיימת  $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , אז  $f(z) \equiv z$ .
- (2) נניח כי  $f(z)$  אנליטית ב- $D = \{z \mid |z| < 1\}$  ומקיימת  $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . מצאו את  $f(z)$ .
- (3) נניח כי  $f(z)$  אנליטית ב- $D = \{z \mid |z| < 1.5\}$  ומקיימת  $f\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{nz}{nz-0.5} dz$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . מצאו את  $f(z)$ .
- (4) כמה פונקציות אנליטיות  $f(z)$  ב- $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$  מקיימות  $f\left(\frac{1}{3n-1}\right) = \frac{2}{n}$ ,  $\forall n \geq 2$ ?
- (5) מצאו את כל הפונקציות האנליטיות  $f(z)$  ב- $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$  המקיימות  $f\left(\frac{1}{n}\right) = \sin(\pi n)$ ,  $\forall n \geq 4$ .
- (6) מצאו (אם ישנן) את כל הפונקציות האנליטיות  $f(z)$  ב- $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$  המקיימות  $f\left(\frac{1}{n}\right) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & n = 2k \\ \frac{1}{n+2} & n = 2k+1 \end{cases}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .
- (7) הוכח או הפרך: לא קיימת פונקציה אנליטית  $f(z)$  בעיגול היחידה הפתוח  $D$ , בעלת אינסוף אפסים ב- $D$ , שאינה פונקציית האפס.

(8) הוכח או הפרך :

קיימת פונקציה אנליטית בתחום  $1 < |z| < 3$  כך שלכל  $x$  ממשי המקיים

$$f(x) = |x|^3 \quad 1 < |x| < 3.$$

(9) נתונות  $f(z), g(z)$  אנליטיות בתחום  $D$  ויהיו  $a, b \in D$ .הוכיחו כי אם  $(f(z) - a)(g(z) - b) = 0$  לכל  $z \in D$  אז בהכרח  $f(z) \equiv a$  או  $g(z) \equiv b$ .(10) נניח כי  $f(z)$  אנליטית בתחום  $D(z_0, R)$  עבור  $z_0 \in \mathbb{C}$  ו- $R > 0$ .נניח בנוסף כי  $f'(z_0) \neq 0$ .

$$\frac{2\pi i}{f'(z_0)} = \oint_{|z-z_0|=r} \frac{1}{f(z) - f(z_0)} dz \quad \text{כך ש-} r > 0$$

הערה: תרגיל זה דורש שימוש במשפט השארית.

(11) הוכח או הפרך :

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$$

נניח כי  $f(z)$  אנליטית ב- $D$  כך ש-  $f\left(\frac{1}{n}\right) = n$  לכל  $n > 1$  וכי  $f(z)$ בעלת קוטב ב- $z = 0$  אז בהכרח  $f(z) = \frac{1}{z}$  לכל  $z \in D$ .

הערה: תרגיל זה דורש ידע על נקודות סינגולריות.

(12) הוכח או הפרך :

נתונה  $f(z)$  אנליטית בתחום  $|z| > 1$  ונתון כי לכל  $z \in (1, \infty)$  מתקיים ש- $f(z)$  ממשי.אז בהכרח גם לכל  $z \in (-\infty, -1)$  מתקיים ש- $f(z)$  ממשי.(13) נניח כי  $f(z)$  רציפה ב- $|z| < 1$  ומקיימת  $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}$  ו- $f\left(\frac{i}{2}\right) = 0$ .הוכיחו כי  $f(z)$  אינה אנליטית ב- $|z| < 1$ .

(14) (אתגר)

נניח כי  $f(z)$  רציפה ב- $\overline{D(0,1)}$  ואנליטית ב- $D(0,1)$  המקיימת.

$$|f(z)| = 1 \quad \forall |z| = 1 \quad \text{הוכיחו כי יש מספר סופי בלבד של נקודות ב-} D(0,1)$$

בהן  $f(z)$  מתאפסת.

רמז: היעזרו במשפט בולצאנו ויארשטראס.

## תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

(2)  $f(z) = \frac{z}{1+z}$

(3)  $f(z) = z$

(4)  $f(z) = 6 \frac{z}{z+1}$

(5) ראו בוידאו.

(6) לא קיימות כאלו פונקציות.

(7) הפרכה. דוגמא נגדית:  $f(z) = \sin\left(\frac{\pi}{1-z}\right)$

(8) לא קיימת כזו פונקציה.

(9) הוכחה.

(10) הוכחה.

(11) הוכחה.

(12) הוכחה.

(13) הוכחה.

(14) הוכחה.

## עקרון המקסימום והמינימום:

### שאלות:

- (1) מצאו (אם קיים) ערך מקסימלי של  $|f(z)|$ , כאשר  $f(z) = e^{-z^2}$  בתחום  $D = \{z \mid |z| < 1\}$ .
- (2) מצאו (אם קיים) ערך מקסימלי של  $|f(z)|$ , כאשר  $f(z) = e^{-z^2}$  בתחום  $D = \{z \mid |z| \leq 3\}$ .
- (3) מצאו (אם קיים) ערך מקסימלי של  $|f(z)|$ , כאשר  $f(z) = \cos(z)$  בתחום  $D = \{z \mid 0 \leq \operatorname{Re}\{z\} \leq 2\pi, 0 \leq \operatorname{Im}\{z\} \leq 2\pi\}$ .
- (4) מצאו (אם קיים) ערך מקסימלי של  $|f(z)|$ , כאשר  $f(z) = e^{z^2}$  בתחום  $D = \{z \mid |z| \leq 1\}$  ואת כל הנקודות בהן הוא מתקבל.
- (5) תהי  $f(z)$  אנליטית בעיגול  $|z| \leq R$  ומקיימת  $|f(z)| > a$   $\forall |z| = R$ . הוכיחו כי אם  $|f(0)| < a$  אז בעיגול  $|z| < R$  יש לפחות אפס אחד של  $f(z)$ .
- (6) (עקרון המינימום)  
תהי  $f(z)$  אנליטית בתחום (קבוצה פתוחה וקשירה)  $U$  ומקיימת  $|f(z)| > 0$ . הוכיחו:  
א. אם  $f(z)$  אינה קבועה אז לא קיימת נקודה  $z_0 \in U$  כך שהפונקציה  $|f(z)|$  מקבלת מינימום ב- $z_0$ .  
ב. אם  $|f(z)|$  מקבלת מינימום ב- $U$  אז היא קבועה.  
ג. הערך המינימלי של  $|f(z)|$  בתחום קומפקטי  $\Omega$  מתקבל על השפה בהנחה כי  $f(z)$  אנליטית ולא מתאפסת ב- $\Omega$ .
- (7) תהי  $f(z)$  אנליטית ב- $|z| \leq 1$  ונניח שאינה מתאפסת שם. נניח גם כי לכל  $|z| = 1$  מתקיים  $|f(z)| = 1$ .  
א. הוכיחו כי  $f(z)$  קבועה.  
ב. האם סעיף א' נכון גם ללא הנחה ש- $f(z)$  אינה מתאפסת ב- $|z| \leq 1$ ?

(8) (עקרון המקסימום לפונקציות הרמוניות).

נניח כי  $f(z) = u + iv$  אנליטית בתחום קומפקטי  $\Omega$ .

הוכיחו כי  $u(x, y)$  מקבלת ערך מקסימלי על השפה  $\partial\Omega$ .

(9) (עקרון המינימום לפונקציות הרמוניות).

נניח כי  $f(z) = u + iv$  אנליטית בתחום קומפקטי  $\Omega$ .

הוכיחו כי  $u(x, y)$  מקבלת ערך מינימלי על השפה  $\partial\Omega$ .

(10) נניח גם כי  $f(z)$ ,  $g(z)$  אנליטיות ב-  $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ .

נניח כי לכל  $|z| = 1$  מתקיים  $\operatorname{Re}[f(z)] = \operatorname{Re}[g(z)]$ .

הוכיחו כי קיים קבוע  $c \in \mathbb{C}$  כך ש-  $f(z) = g(z) + c$  לכל  $z \in D$ .

(11) יהי  $p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$  פולינום ממעלה  $n$  ( $a_n \neq 0$ ).

נתון כי לכל  $|z| = 1$  מתקיים  $|p(z)| \leq 1$ .

הראו כי לכל  $|z| \geq 1$  מתקיים  $|p(z)| \leq |z|^n$ .

רמז: הראו כי הפונקציה  $f(z) = z^n p\left(\frac{1}{z}\right)$  היא פונקציה שלמה ומצאו לה חסם

בדיסק היחידה.

הערה: ניתן להשתמש בעובדה: אם  $f(z)$  אנליטית בסביבה נקובה של  $z_0$

והגבול  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  קיים וסופי אזי  $f(z)$  אנליטית גם ב-  $z_0$ .

(הכוונה שניתן להגדיר אותה ב-  $z_0$  כך שתהיה אנליטית שם).

(12) יהי  $R > 0$  ונניח כי  $f(z)$  אנליטית בתחום:

$$A = \{z = x + iy \mid -R \leq x \leq R, -R \leq y \leq R\}$$

נסמן את שפות התחום כך:

$$l_1 = \{z = R + iy \mid -R \leq y \leq R\} \quad l_3 = \{z = -R + iy \mid -R \leq y \leq R\}$$

$$l_2 = \{z = x + iR \mid -R \leq x \leq R\} \quad l_4 = \{z = x - iR \mid -R \leq x \leq R\}$$

הוכיחו כי  $|f(0)| \leq \frac{1}{4} (\max_{l_1} |f(z)| + \max_{l_2} |f(z)| + \max_{l_3} |f(z)| + \max_{l_4} |f(z)|)$

רמז: התבוננו בפונקציה  $g(z) = \frac{1}{4} (f(z) + f(-z) + f(iz) + f(-iz))$ .

## (13) (אתגר)

הוכיחו כי משפט ההעתקה הפתוחה: אם  $A \subset \mathbb{C}$  קבוצה פתוחה ו-  $f(z)$  אנליטית ולא קבועה ב-  $A$  אז התמונה  $f[A]$  פתוחה.

(14) נסמן  $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$  ונניח כי:

-  $f(z)$  הולומורפית ב-  $D(0,1)$ .

- לכל  $z \in D(0,1)$  מתקיים  $|f(z)| \leq 1$ .

-  $f(0) = 0$ .

הוכיחו כי לכל  $z \in D(0,1)$  וכי  $|f'(0)| \leq 1$  ואת ההערה הבאה.

הערה: אם בנוסף ידוע כי קיימת נקודה  $z_0 \in D(0,1)$  (שאינה אפס)

כך ש-  $|f(z_0)| = |z_0|$  אז קיים קבוע  $c \in \mathbb{C}$  כך ש-  $f(z) = c \cdot z$ .

(15) נניח כי  $f(z)$  הולומורפית בתחום  $\overline{D(0,1)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ 

ומקיימת  $|f(z)| = 1$  לכל  $|z| = 1$ .

נניח בנוסף כי  $f(z) = 0$  אם ורק אם  $z = 0$ .

הוכיחו כי קיימים קבועים  $c$  ו-  $k$  כך ש-  $f(z) = c \cdot z^k$ .

הערה: ניתן להשתמש בעקרון המינימום.

## (16) (נכון או לא נכון)

נגדיר  $A = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$  ונניח כי  $f(z)$  אנליטית ב-  $A$  ורציפה ב-  $\bar{A}$ .

נתון כי:

$$\begin{aligned} \forall |z| = 1 & \quad |f(z)| = 1 \\ \forall |z| = 2 & \quad |f(z)| = 8 \end{aligned}$$

אזי בהכרח  $|f(z)| \leq |z|^3$  לכל  $z \in A$ .

(17) נניח כי  $f(z)$  אנליטית ב-  $|z| \leq 1$  ומקיימת:

-  $|f(z)| \leq 1$   $\forall z \in \{ \operatorname{Im}(z) \geq 0, |z| = 1 \}$

-  $|f(z)| \leq 3$   $\forall z \in \{ \operatorname{Im}(z) \geq 0, |z| = 2 \}$

הוכיחו כי  $|f(0)| \leq \sqrt{6}$ .

רמז: התבוננו בביטוי  $f(z)f(-z)$ .

(18) יהי  $r > 0$ .נגדיר  $C_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$  ויהיו  $z_1, \dots, z_n \in C_r$ .הוכיחו כי קיים  $z \in C_r$  כך ש- $\prod_{k=1}^n |z - z_k| > r^n$ .**תשובות סופיות:**

(1) לא קיים.

(2)  $e^9$ 

(3) 268

(4)  $|f(1)| = |f(-1)| = e$ 

(5) הוכחה.

(6) הוכחה.

(7) א. הוכחה. ב. לא.

(8) הוכחה.

(9) הוכחה.

(10) הוכחה.

(11) הוכחה.

(12) הוכחה.

(13) הוכחה.

(14) הוכחה.

(15) הוכחה.

(16) נכון.

(17) הוכחה.

(18) הוכחה.

# שיטות מתמטיות

## פרק 6 - אינטגרציה מרוכבת

### תוכן העניינים

|     |                                          |    |
|-----|------------------------------------------|----|
| 1.  | אינטגרל ממשי של פונקציה מרוכבת           | 30 |
| 2.  | אינטגרל מרוכב של פונקציה מרוכבת          | 31 |
| 3.  | משפט קושי גורסט                          | 32 |
| 4.  | נוסחת האינטגרל של קושי                   | 33 |
| 5.  | נוסחת האינטגרל המוכללת של קושי           | 36 |
| 6.  | משפט הערכה                               | 38 |
| 7.  | תרגילים מסכמים                           | 39 |
| 8.  | פונקציות קדומות                          | 41 |
| 9.  | התכנסות במש של סדרת פונקציות הולומורפיות | 43 |
| 10. | משפט מוררה                               | 44 |

## אינטגרל ממשי של פונקציה מרוכבת:

שאלות:

(1) חשבו את האינטגרל  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-imx} dx$  לכל  $m, n \in \mathbb{Z}$ .

(2) לכל  $z \in \mathbb{C}$ , המקיים  $\operatorname{Re}(z) < 0$ , פתרו את האינטגרל  $\int_0^{\infty} e^{zt} dt$ .

תשובות סופיות:

$$\begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases} \quad (1)$$

$$-\frac{1}{z} \quad (2)$$

## אינטגרל מרוכב של פונקציה מרוכבת:

### שאלות:

(1) חשבו את האינטגרל  $\oint_{|z|=1} z^n dz$ , כאשר  $n \in \mathbb{Z}$ .

(2) חשבו את האינטגרל  $\int_{\gamma} \frac{z+2}{z} dz$ , כאשר  $\gamma = \{z = 2e^{i\theta} \mid 0 \leq \theta \leq \pi\}$ .

(3) חשבו את האינטגרל  $\int_{\gamma} (z-1) dz$ , כאשר  $\gamma = \{z = 1 + e^{i\theta} \mid \pi \leq \theta \leq 2\pi\}$ .

(4) חשבו את האינטגרל  $\oint_{\gamma} \pi e^{\pi \bar{z}} dz$ , כאשר  $\gamma$  מסילת קווים ישרים,

העוברת בנקודות  $0 \rightarrow 1 \rightarrow 1+i \rightarrow i \rightarrow 0$ .

(5) חשבו את אורך המסילה  $\gamma = [z_1, z_2]$ , כאשר  $\gamma = [z_1, z_2]$  היא מסילת הקו הישר המחברת בין  $z_1$  ל- $z_2$ .

(6) חשבו את אורך המסילה  $\gamma(t) = \{(t - \sin t) + i(1 - \cos t) \mid 0 < t < 1\}$ .

(7) חשבו את האינטגרל  $\oint_{|z|=1} \bar{z} dz$ .

### תשובות סופיות:

(1)  $\begin{cases} 0 & n \neq -1 \\ 2\pi i & n = -1 \end{cases}$

(2)  $2\pi i - 4$

(3)  $0$

(4)  $4e^{\pi} - 4$

(5)  $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

(6)  $\approx 0.48$

(7)  $2\pi i$

## משפט קושי גורסט:

שאלות:

$$(1) \quad \int_0^{2+\frac{i\pi}{4}} e^z dz \quad \text{חשבו את האינטגרל}$$

$$(2) \quad \int_4^{1+i} \frac{1}{2\sqrt{z}} dz = \sqrt[4]{2} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) - 2 + i\sqrt[4]{2} \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \quad \text{הוכיחו כי}$$

כאשר  $\sqrt{z}$  הינו הענף העיקרי של פונקציית השורש.

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \frac{e^2 [1+i]}{\sqrt{2}} - 1$$

(2) הוכחה.

## נוסחת האינטגרל של קושי:

שאלות:

(1) חשבו את האינטגרל  $\oint_{|z|=1} \frac{\cos(z)}{z} dz$ .

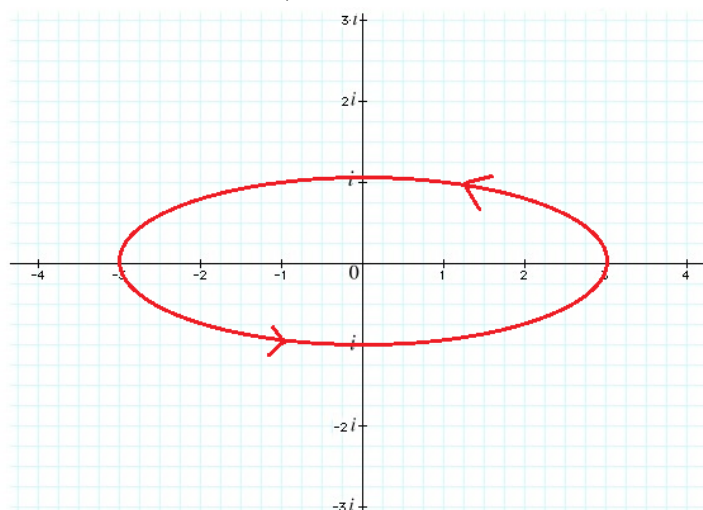
(2) חשבו את האינטגרל  $\oint_{|z-2|=1} \frac{e^z}{z-2} dz$ .

(3) חשבו את האינטגרל  $\oint_{|z-2|=1} \frac{\sin(z^2)}{z(z-2)} dz$ .

(4) חשבו את האינטגרל  $\oint_{|z|=1} \frac{e^z + e^{-z}}{z(z-2)(z-3)} dz$ .

(5) חשבו את האינטגרל  $\oint_{|z|=1.5} \frac{e^z}{z(z-1)(z-2)} dz$ .

(6) חשבו את האינטגרל  $\oint_{\gamma} \frac{\sin(z)}{z(z-2)(z-4)} dz$ , עבור המסילה שבציור:



(7) חשבו את האינטגרל  $\oint_{|z|=2} \frac{z^2 - e^{z^2}}{z(z^2 - 1)(z + 3)} dz$

(8) תהי  $f(z)$  פונקציה הולומורפית בתחום  $D$ .  
 נניח כי  $z_0 \in D$  וכי הדיסק  $D(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq R\}$  מוכל כולו ב- $D$ .  
 הוכיחו כי  $f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + R \cdot e^{i\theta}) d\theta$

(9) חשבו את האינטגרל  $\int_0^\pi \frac{1}{2 + \sin(2\theta)} d\theta$

(10) הוכיחו:  $n \in \mathbb{N} : \int_0^{2\pi} \cos^{2n}(\theta) d\theta = \frac{2\pi}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$

(11) חשבו את האינטגרל  $\int_C \frac{z}{z^2 + 1} dz$  כאשר  $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2, \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$

(12) חשבו את האינטגרל  $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a + b \cos x)}$  כאשר  $a > b > 0$

(13) חשבו את האינטגרל  $\oint_{|z|=1} \frac{\operatorname{Log}\left(1 + \frac{z}{3}\right)}{z} dz$

(14) תהי  $f(z) = u + iv$  הולומורפית בתחום  $|z| < 1$  כך ש- $u^2(0) = v^2(0)$ .  
 הוכיחו כי לכל  $0 < r < 1$  מתקיים  $\int_0^{2\pi} u^2(re^{i\theta}) d\theta = \int_0^{2\pi} v^2(re^{i\theta}) d\theta$

(15) תהי  $f(z) = u + iv$  הולומורפית בתחום  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ .  
 הוכיחו כי לכל  $0 < r < 1$  ולכל  $0 < |a| < r$  מתקיים

$$\oint_{|z|=r} \frac{\operatorname{Re}(z)}{z - a} f(z) dz = \pi i \cdot \left( \left[ a + \frac{r^2}{a} \right] f(a) - \frac{r^2}{a} \cdot f(0) \right)$$

## תשובות סופיות:

(1)  $2\pi i$

(2)  $2\pi e^2 i$

(3)  $2\pi i \cdot \frac{\sin(2^2)}{2}$

(4)  $2\pi i \cdot \frac{1}{3}$

(5)  $\pi i - 2\pi e i$

(6)  $-\frac{\sin(2)\pi i}{2}$

(7)  $\pi i \cdot \left( \frac{17}{12} - \frac{3e}{4} \right)$

(8) הוכחה.

(9)  $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$

(10) הוכחה.

(11)  $\pi i$

(12)  $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$

(13) 0

(14) הוכחה.

(15) הוכחה.

## נוסחת האינטגרל המוכללת של קושי:

שאלות:

(1) חשבו את האינטגרל  $\oint_{|z-i|=1} \frac{\sin(z)}{(z-i)^3} dz$ .

(2) חשבו את האינטגרל  $\oint_{|z|=1} \frac{\cos(z)}{z^3} dz$ .

(3) חשבו את האינטגרל  $\oint_{|z|=4} \frac{\cos(z)}{(z-\pi)^2} dz$ .

(4) חשבו את האינטגרל  $\oint_{|z-1|=1} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}z\right)}{(z-1)^2(z-3)} dz$ .

(5) חשבו את האינטגרל  $\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{z+1}\right)}{z^3} dz$ .

(6) חשבו את האינטגרל  $\oint_{|z|=6} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}z\right)}{(z-1)^2(z-3)} dz$ .

(7) חשבו את האינטגרל  $\oint_{|z|=5} \frac{1}{(z-2)^2(z-4)} dz$ .

## תשובות סופיות:

$$\frac{\pi}{2} \left( e - \frac{1}{e} \right) \quad (1)$$

$$-\pi i \quad (2)$$

$$-2\pi i \cdot \sin(\pi) \quad (3)$$

$$-\frac{\pi+4}{4\sqrt{2}} \pi i \quad (4)$$

$$-2\pi^2 i \quad (5)$$

$$-\frac{\pi i}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) \quad (6)$$

$$0 \quad (7)$$

## אי-שיויונות אינטגרליים (משפט הערכה):

### שאלות:

הוכיחו את אי השווינויות הבאים:

$$(1) \quad \left| \int_C \frac{z^3}{z^2+1} dz \right| \leq \frac{81\pi}{8} \quad \text{כאשר } C: \{ |z|=3, \operatorname{Re}(z)>0 \}$$

$$(2) \quad \left| \int_{|z|=3} \frac{1}{z^2-1} dz \right| \leq \frac{6\pi}{8}$$

$$(3) \quad \left| \int_C e^{z^2} dz \right| \leq \sqrt{8} \quad \text{כאשר } C \text{ הינה מסילת הקו הישר מ-} 0 \text{ עד } 2+2i.$$

$$(4) \quad \left| \int_C \frac{z^2}{\sin(z)} dz \right| \leq \frac{\pi^2}{2} + 2 \quad \text{כאשר } C \text{ הוא הקטע הישר המתחיל בנקודה } \frac{\pi}{2} + i$$

$$\text{ומסתיים בנקודה } \frac{\pi}{2} - i.$$

### תשובות סופיות:

ראה פתרונות מלאים בסרטוני הוידאו.

## תרגילים מסכמים:

### שאלות:

$$(1) \quad \text{הוכיחו כי } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos(2bx) dx = \sqrt{\pi} e^{-b^2} \text{ עבור } b > 0.$$

$$(2) \quad \text{הוכיחו כי } \int_0^{\infty} e^{-x^2} \sin(x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \text{ ו-} \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos(x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right).$$

$$(3) \quad \text{הוכיחו כי } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx = \pi.$$

$$(4) \quad \text{חשבו את האינטגרל } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^6(x)}{x^6} dx.$$

$$(5) \quad \text{הוכיחו כי } \int_0^{2\pi} \frac{1}{(a + b \cos \theta)^2} d\theta = 2\pi \cdot \frac{a}{(a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ עבור } a > b > 0.$$

$$(6) \quad \text{תהי } f(z) = \frac{1}{(1+az)^2} + \frac{1}{(1+bz)^2} \text{ כאשר } a, b \in \mathbb{C} \text{ קבועים המקיימים } |a| < 1, |b| < 1.$$

$$\text{שונים מאפס. נניח כי } |f(z)| \leq 3 \text{ לכל } |z|=1. \text{ הוכיחו כי } |a^n + b^n| \leq \frac{3}{n+1} \text{ לכל } n \geq 0.$$

$$\text{רמז: התבוננו ב-} |f^{(n)}(0)|.$$

**תשובות סופיות:**

(1) הוכחה.

(2) הוכחה.

(3) הוכחה.

(4)  $\frac{11\pi}{20}$ 

(5) הוכחה.

(6) הוכחה.

## פונקציות קדומות:

### שאלות:

(1) האם הפונקציה  $f(z) = \frac{1}{z}$  אנליטית בתחום  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ? האם יש לה קדומה שם?

(2) האם הפונקציה  $f(z) = \frac{1}{z^n}$  ( $n \geq 2$ ) אנליטית בתחום  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ? האם יש לה קדומה שם?

(3) האם הפונקציה  $f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$  אנליטית בתחום  $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$ ? האם יש לה קדומה שם?

(4) האם הפונקציה  $f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$  אנליטית בתחום  $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$ ? האם יש לה קדומה שם?

(5) הוכיחו כי לפונקציה  $f(z) = \frac{1}{z(z^2 - \pi^2)}$  יש קדומה בתחום  $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > \pi\}$ .

(6) נסמן  $I = \int_{\Gamma} \frac{2z}{z^2 + 1} dz$  כאשר  $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2, \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$  בכיוון החיובי.

א. האם לאינטגרנד  $\frac{2z}{z^2 + 1}$  יש פונקציה קדומה בתחום פשוט קשר המכיל את  $\Gamma$ ?  
ב. חשבו את  $I$ .

(7) נניח כי  $a, b$  מספרים מרוכבים בחצי המישור השמאלי, כלומר  $\operatorname{Re}(a) < 0, \operatorname{Re}(b) < 0$ .  
הוכיחו כי  $|e^a - e^b| < |a - b|$ ,  $(a \neq b)$ .

(8) נניח כי  $f(z), g(z)$  פונקציות שלמות המקיימות  $f^2(z) + g^2(z) = 1$  לכל  $z \in \mathbb{C}$ . הוכיחו כי קיימת פונקציה שלמה  $h(z)$  כך שמתקיים:  $f(z) = \cos(h[z]) \mid g(z) = \sin(h[z])$ .

### תשובות סופיות:

- (1)  $2\pi i$
- (2) לפונקציה אנליטית  $f(z)$  בתחום  $\Omega$  תהיה קיימת קדומה בתחום אם ורק אם  $\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$  לכל מסלול סגור  $\gamma$  המוכל בתחום  $\Omega$ .
- (3)  $\pi$
- (4) לפונקציה אנליטית  $f(z)$  בתחום  $\Omega$  תהיה קיימת פונקציה קדומה בתחום אם ורק אם  $\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$  לכל מסלול סגור בתחום.
- (5) הוכחה.
- (6) א. לפונקציה אנליטית  $f(z)$  בתחום  $\Omega$  תהיה קיימת פונקציה קדומה בתחום אם ורק אם  $\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$  לכל מסלול סגור בתחום. ב.  $2\pi i$
- (7) הוכחה.
- (8) הוכחה.

## התכנסות במש של סדרת פונקציות הולומורפיות:

### שאלות:

(1) יהי  $a > 0$ . הוכיחו כי הפונקציה  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-a \cdot n^2 z}$  הולומורפית ב- $\text{Re}(z) > 0$ .

(2) יהי  $a > 0$ . הוכיחו כי הפונקציה  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a+n)^z}$  הולומורפית ב- $\text{Re}(z) > 1$ .

הערה:  $(a+n)^z = e^{z \cdot \text{Log}(a+n)}$  מוגדרת באופן הבא  $(a+n)^z = e^{z \cdot \text{Log}(a+n)}$  ו- $\text{Log}(z)$  זה הענף הראשי של הלוג.

(3) פונקציית זטא של רימן מוגדרת כך  $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ .

הראו כי היא הולומורפית בתחום  $\text{Re}(z) > 1$ .

הערה:  $n^z = e^{z \cdot \text{Log}(n)}$  מוגדרת באופן הבא:  $n^z = e^{z \cdot \text{Log}(n)}$  ו- $\text{Log}(z)$  זה הענף הראשי של הלוג.

(4) תהי  $f(x): (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה וחסומה. נגדיר  $L[f](z) = \int_0^{\infty} f(x) e^{-z \cdot x} dx$ .

נתון כי  $L[f](z)$  רציפה בתחום  $\text{Re}(z) > 0$ , הוכיחו כי היא הולומורפית שם.

### תשובות סופיות:

ראו פתרונות מלאים בסרטוני הוידאו.

## משפט מוררה:

**שאלה:**

(1) תהי  $f_n(z)$  סדרת פונקציות אנליטיות המתכנסת במ"ש לפונקציה  $f(z)$

בתחום  $D$  פשוט קשר. הוכיחו כי :

א.  $f(z)$  אנליטית בתחום  $D$ .

ב. מתקיים  $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(z) = f'(z) \quad \forall z \in D$

הערה: תחום זה קבוצה פתוחה וקשירה.

**תשובה סופית:**

ראו פתרון מלא בסרטון הוידאו.

# שיטות מתמטיות

פרק 7 - טורים

תוכן העניינים

|    |                                       |
|----|---------------------------------------|
| 45 | 1. טורי טיילור ומקלורן                |
| 46 | 2. טורי לורן                          |
| 50 | 3. טורים כלליים                       |
| 51 | 4. טורים מספריים                      |
| 52 | 5. מבחן ויירשטראס להתכנסות במידה שווה |
| 53 | 6. קריטריון קושי-הדמרד                |

## טורי טיילור ומקלורן:

### שאלות:

(1) מצאו טור טיילור עבור  $f(z) = \sin(z+1)$  סביב  $z=0$  ומצאו תחום התכנסות.

(2) מצאו טור טיילור עבור  $f(z) = \frac{1}{z}$  סביב  $z=i$  וציינו את רדיוס ההתכנסות.

(3) פתחו את הפונקציה  $f(z) = \frac{2i}{2+i+z}$  סביב  $z_0 \neq -(2+i)$  בתחום  $|z-z_0| < |2+i+z_0|$ .

(4) פתחו את הפונקציה  $f(z) = \frac{1}{(1-z)^3}$  לטור חזקות סביב  $z_0 \neq 1$  בתחום  $|z-z_0| < |1-z_0|$ .

(5) נניח כי  $f(z)$  שלמה ומתאפסת רק בנקודה  $z=0$  ומתקיים  $f'(0)=1$ .

חשבו את  $\oint_{|z|=1} \frac{\cos(z)}{f(z)} dz$ .

### תשובות סופיות:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \cos(1) \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} + \sin(1) \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \right) \quad z \in \mathbb{C} \quad (1)$$

$$f(z) = \frac{1}{i} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{-1}{i} \right)^n (z-i)^n \quad |z-i| < 1 \quad (2)$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2i(-1)^n}{(2+i+z_0)^{n+1}} (z-z_0)^n \quad (3)$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{(n+1)(n+2)}{(1-z_0)^{n+3}} (z-z_0)^n \quad (4)$$

$$2\pi i \quad (5)$$

## טורי לורן:

## שאלות:

(1) פתחו את הפונקציה לטור לורן סביב  $z_0 = 0$  בכל התחומים האפשריים  $f(z) = \frac{1}{1-z}$ .

(2) פתחו את הפונקציה  $f(z) = \frac{1}{1 - \frac{z}{2}}$  לטור לורן סביב  $z_0 = 0$  בתחום  $|z| < 2$  ובתחום  $|z| > 2$ .

(3) פתחו את הפונקציה  $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$  לטור לורן סביב  $z_0 = -1$  בתחומים הבאים:  $0 < |z+1| < 2$  ו-  $|z+1| > 2$ .

(4) פתחו את הפונקציה  $f(z) = \frac{1}{(z+2)(z+3)}$  לטור לורן סביב  $z_0 = -3$  בכל התחומים האפשריים.

(5) פתחו את הפונקציה  $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$  לטור לורן סביב  $z_0 = 0$  בתחום  $1 < |z| < 3$ . רמז: פירוק לשברים חלקיים.

(6) פתחו את הפונקציה  $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$  לטור לורן סביב  $z_0 = 0$  בתחום  $|z| > 3$ . רמז: פירוק לשברים חלקיים.

(7) פתחו את הפונקציה  $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$  לטור לורן סביב  $z_0 = 0$  בתחום  $|z| < 1$ .

(8) פתחו את הפונקציה  $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$  לטור לורן סביב  $z_0 = 0$  בתחום  $|z| < 1$  ומצאו את המקדם  $a_{-1}$ .

(9) פתחו את הפונקציה  $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$  לטור לורן סביב  $z_0 = i$  בתחום  $0 < |z-i| < 2$  ומצאו את המקדם  $a_{-1}$ .

(10) פתחו את הפונקציה  $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$  לטור לורן סביב  $z_0 = i$  בתחום  $|z-i| > 2$ .

(11) פתחו את הפונקציה  $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-4)}$  לטור לורן סביב  $z_0 = 1$  כך שיתכנס בתחום המכיל את  $z = 5$ .

(12) פתחו את הפונקציה  $f(z) = \frac{1}{z^2 - 5z + 6}$  לטור לורן סביב  $z_0 = 0$  כך שיתכנס בתחום המכיל את  $1-3i$ .

(13) נניח כי  $|a| < 1$  ונגדיר את הפונקציה  $f(z) = \frac{a}{z-a}$  (כאשר  $a$  מספר ממשי).

א. פתחו פונקציה זו לטור לורן בטבעת  $|a| < |z| < \infty$ .

ב. הוכיחו את הזהות  $\sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(n\theta) = \frac{a \cos(\theta) - a^2}{1 - 2a \cos(\theta) + a^2}$ .

(14) תהי  $a \in \mathbb{C}$  ונניח כי  $f(z)$  אנליטית בתחום  $\mathbb{C} \setminus \{a\}$  ונניח כי

$$\lim_{z \rightarrow a} (z-a) f(z) = 0$$

הוכיחו כי לכל  $r > 0$  מתקיים  $f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a} dz$ .

(15) נסמן  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$  פיתוח לטור לורן של  $f(z) = \frac{z}{e^{z^2} - 1}$  סביב  $z_0 = 0$  בתחום  $0 < |z| < r$ .

א. מצאו מהו ה- $r$  המקסימלי.

ב. מצאו את  $a_n$  לכל  $n \leq 4$ .

הערה: תרגיל זה דורש ידע בסיווג של נקודות סינגולריות.

(16) חשבו את האינטגרל  $\oint_{|z|=1} z^3 \cos\left(\frac{1}{z}\right) dz$ .

תזכורת: מקדמי לורן נתונים ע"י הנוסחה  $a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$ .

(17) חשבו את האינטגרל  $\oint_{|z|=1} e^{\frac{1}{z}} dz$ .

תזכורת: מקדמי לורן נתונים ע"י הנוסחה  $a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$ .

## תשובות סופיות:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad |z| < 1 \quad (1)$$

$$f(z) = -\left(\frac{1}{z}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n \quad |z| > 1$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n \quad |z| < 2 \quad (2)$$

$$f(z) = -\left(\frac{2}{z}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n \quad |z| > 2$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (z+1)^{n-1} \quad 0 < |z+1| < 2 \quad (3)$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{(z+1)^{n+2}} \quad |z+1| > 2$$

$$f(z) = -\frac{1}{(z+3)} \sum_{n=0}^{\infty} (z+3)^n \quad 0 < |z+3| < 1 \quad (4)$$

$$f(z) = \frac{1}{(z+3)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+3)^n} \quad |z+3| > 1$$

$$f(z) = \frac{1}{2z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^n} - \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{3^n} \quad 1 < |z| < 3 \quad (5)$$

$$f(z) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{n+1}} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{z^{n+1}} \quad |z| > 3 \quad (6)$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{6 \cdot 3^n} \right] z^n \quad |z| < 1 \quad (7)$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} \quad |z| < 1 \quad (8)$$

$$a_{-1} = 0$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2i}\right)^{n+1} (z-i)^{n-1} \quad 0 < |z-i| < 2 \quad (9)$$

$$a_{-1} = \frac{1}{2i}$$

$$f(z) = \frac{1}{(2-i)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-2i}{z-i}\right)^n \quad 2 < |z-i| \quad (10)$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(z-1)^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(z-1)^{n+2}} \quad |z-1| > 3 \quad (11)$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}} \quad |z| > 3 \quad (12)$$

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{z^n} \quad |a| < |z| < \infty \quad \text{א.} \quad (13)$$

ב. הוכחה.

(14) הוכחה.

$$r = \sqrt{2\pi} \quad \text{א.} \quad (15)$$

$$\text{ב. } a_4 = 0, \quad a_3 = \frac{1}{12}, \quad a_2 = 0, \quad a_1 = -\frac{1}{2}, \quad a_0 = 0, \quad a_{-1} = 1, \quad \forall n \leq -2 \quad a_n = 0.$$

$$\frac{\pi i}{12} \quad (16)$$

$$2\pi i \quad (17)$$

## טורים כלליים:

### שאלות:

- (1) מצאו תחום התכנסות עבור הטור  $\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}$ .
- (2) מצאו תחום התכנסות עבור הטור  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{(1-i)^n}$ .
- (3) מצאו תחום התכנסות עבור הטור  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n (z-1)^n}$ .
- (4) מצאו תחום התכנסות עבור הטור  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{4}\right)^n$ .
- (5) מצאו תחום התכנסות עבור הטור  $\sum_{n=0}^{\infty} e^{nz}$ .

### תשובות סופיות:

- (1)  $|z| > 1$
- (2)  $|z| > \frac{1}{\sqrt{2}}$
- (3)  $|z| > \frac{1}{\sqrt{2}}$
- (4)  $2 < |z| < 4$
- (5)  $\operatorname{Re}(z) < 0$

## טורים מספריים:

### שאלות:

- (1) בדקו את התכנסות הטור  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(in)}{2^n}$ .
- (2) בדקו את התכנסות הטור  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \sin(in)}{3^n}$ .
- (3) בדקו את התכנסות הטור  $\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{2+i}{\sqrt{5}} \right)^n$ .
- (4) בדקו את התכנסות הטור  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2+i^n}$ .
- (5) בדקו את התכנסות הטור  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + i^n}$ .

### תשובות סופיות:

- (1) מתבדר.
- (2) מתכנס.
- (3) מתבדר.
- (4) מתבדר.
- (5) מתכנס.

## מבחן ויירשטראס להתכנסות במידה שווה:

שאלות:

(1) הוכיחו כי הטור  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  מתכנס במידה שווה ב-  $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$  כאשר  $0 < r < 1$ .

(2) הוכיחו כי הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$  מתכנס במידה שווה ב-  $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ .

(3) הוכיחו כי הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z^2 - 1)^n}$  מתכנס במידה שווה ב-  $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq 2\}$ .

(4) הוכיחו כי הטור  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{z^n + 1}$  מתכנס במידה שווה ב-  $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$  כאשר  $0 < r < 1$ .

(5) הוכיחו כי הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$  מתכנס במידה שווה ב-  $U = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \geq 2\}$ ,

(כאשר  $n^{-z}$  מוגדרת על ידי הענף הראשי של הלוג).

תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

(2) הוכחה.

(3) הוכחה.

(4) הוכחה.

(5) הוכחה.

## קריטריון קושי – הדמרד:

שאלות:

$$(1) \quad \text{מצאו רדיוס התכנסות עבור הטור} \quad \sum_{n=0}^{\infty} e^{in} z^n$$

$$(2) \quad \text{מצאו רדיוס התכנסות עבור הטור} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z}{in} \right)^n$$

$$(3) \quad \text{מצאו רדיוס התכנסות עבור הטור} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n (2n+1)} (z-3n)^n$$

תשובות סופיות:

$$R=1 \quad (1)$$

$$R=\infty \quad (2)$$

$$R=3 \quad (3)$$

# שיטות מתמטיות

## פרק 8 - נקודות סינגולריות

### תוכן העניינים

|    |                                   |
|----|-----------------------------------|
| 54 | 1. אפסים של פונקציות אנליטיות     |
| 56 | 2. מיון נקודות סינגולריות         |
| 60 | 3. מיון נקודות סינגולריות באינסוף |
| 61 | 4. משפט קסורטי ויירשטראס          |

## אפסים של פונקציות אנליטיות:

### שאלות:

- (1) קבעו את סדר האפס של הפונקציה  $f(z) = z \sin(z)$  בנקודה  $z = 0$ .
- (2) קבעו את סדר האפס של הפונקציה  $f(z) = z \sin(z^3)$  בנקודה  $z = 0$ .
- (3) נניח כי הפונקציה  $f(z)$  אנליטית ב- $z_0$  ומתאפסת שם מסדר  $n$ .  
נניח כי הפונקציה  $g(z)$  אנליטית ב- $z_0$  ומתאפסת שם מסדר  $m$ .  
הוכיחו כי הפונקציה  $h(z) = f(z)g(z)$  אנליטית ב- $z_0$  ומתאפסת שם מסדר  $n+m$ .
- (4) מצאו סדר אפס עבור הפונקציה  $h(z) = z^{20} \sin(z)$  בנקודה  $z_0 = 0$ .
- (5) מצאו סדר אפס עבור הפונקציה  $f(z) = e^{\sin(z)} - \sin^2(z) - 1$  בנקודה  $z_0 = 0$ .
- (6) נניח כי לפונקציה  $f(z)$  יש אפס מסדר 7 בנקודה  $z_0 = 0$ .  
נניח כי לפונקציה  $g(z)$  יש אפס מסדר 3 בנקודה  $z_0 = 0$ .  
מצאו את סדר האפס של הפונקציה  $h(z) = f(z) + g(z)$ .
- (7) מצאו סדר אפס עבור הפונקציה  $h(z) = 6 \sin(z^3) + z^{12}(z^6 - 6)$  בנקודה  $z_0 = 0$ .
- (8) הוכיחו כי לא קיימת  $f(z)$  אנליטית ב- $B_1(0)$  כך ש- $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}$  לכל  $n \in \mathbb{N}$ .

**תשובות סופיות:**

- (1)  $N = 2$
- (2)  $N = 2$
- (3) הוכחה.
- (4)  $N = 21$
- (5)  $N = 1$
- (6)  $N = 3$
- (7)  $N = 3$
- (8) הוכחה.

## מיון נקודות סינגולריות:

### שאלות:

(1) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של הפונקציה  $f(z) = \frac{1}{1-z}$ .

(2) נניח כי  $h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$  כאשר  $f(z)$  ו- $g(z)$  אנליטיות בסביבת  $z=0$ .

נניח כי  $z=0$  זה אפס מסדר 7 של  $f(z)$ .

נניח כי  $z=0$  זה אפס מסדר 11 של  $g(z)$ .

מהו סוג הסינגולריות של  $h(z)$  ב- $z=0$ ?

(3) נניח כי  $h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$  כאשר  $f(z)$  ו- $g(z)$  אנליטיות בסביבת  $z_0$ .

נניח כי  $z_0$  זה אפס מסדר  $n$  של  $f(z)$ .

נניח כי  $z_0$  זה אפס מסדר  $m$  של  $g(z)$ .

מהו סוג הסינגולריות של  $h(z)$  ב- $z_0$ ? חלקו למקרים  $n < m$  ו- $n \geq m$ .

א. מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של  $f(z) = \frac{1 - \cos(z)}{z^2}$ .

ב. מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של  $f(z) = z \sin\left(\frac{1}{z}\right)$ .

(4) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של  $f(z) = ze^{\frac{1}{z}}$ .

(5) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של  $f(z) = z \cos\left(\frac{1}{z}\right)$ .

(6) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של  $f(z) = \frac{1}{e^{-z}-1} + \frac{1}{z}$ .

(7) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של  $f(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$ .

(8) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של  $f(z) = \frac{1}{z^2-1} \cos\left(\frac{\pi z}{z+1}\right)$ .

(9) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של  $f(z) = e^{\frac{z}{z-2}}$ .

(10) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של  $f(z) = \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}$ . האם הן מבודדות?

(11) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של  $f(z) = z \cot(z)$ .

(12) נתון כי הפונקציה  $f(z)$  אנליטית בתחום  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

נניח כי 0 זה קוטב מסדר  $m$  של  $f(z)$  ובנוסף נניח כי  $-1 \notin f[\mathbb{C} \setminus \{0\}]$ .

מצאו ומיינו את כל הנקודות הסינגולריות של  $g(z) = \frac{f(z)-1}{f(z)+1}$ .

(13) מצאו את הקטבים והאפסים בתחום  $|z| < 4$  של הפונקציה  $f(z) = \frac{(z-2)^2}{(e^{2z}-1)^2 z^3}$ .

(14) מיינו את הנקודות  $z=0$  ו-  $z = \frac{\pi}{4}$  עבור  $f(z) = \frac{\tan(z)}{z^2 - \frac{\pi}{4}z}$ .

(15) תהיינה  $f, g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  פונקציות שלמות שאינן קבועות.

נניח כי לכל  $z \in \mathbb{C}$  מתקיים  $|f(z)| \leq |g(z)|$ .

א. הוכיחו שכל נקודה סינגולרית של  $\frac{f(z)}{g(z)}$  הינה סליקה.

ב. הוכיחו כי  $f(z) = c \cdot g(z)$  כאשר  $c$  קבוע המקיים  $|c| \leq 1$ .

(16) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של  $f(z) = \frac{\left(z^2 - \frac{1}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{z}\right)}$ .

(17) הוכיחו כי הנקודה  $z_0 = i$  היא נקודה סינגולרית עיקרית של  $f(z) = \cos\left(\frac{1}{z^2+1}\right)$ .

(18) תהי  $f(z): D \rightarrow \mathbb{C}$  אנליטית כאשר  $D = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < 1\}$ .

נניח כי מתקיים  $|z - z_0|^a |f(z)| \leq 1$  לכל  $z \in D$  עבור  $0 \leq a < 1$ .

הוכיחו כי  $z_0$  נקודה סינגולרית סליקה של  $f(z)$ .

(19) (אתגר)

נתונה  $f(z)$  אנליטית בתחום  $0 < |z| < 1$  המקיימת  $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n!}$ .  
הוכיחו כי  $z=0$  זו נקודה סינגולרית עיקרית של  $f(z)$ .

(20) (אתגר)

הוכיחו כי אם  $z_0$  זה קוטב של  $f(z)$  אז היא בהכרח עיקרית של  $g(z) = e^{f(z)}$ .

רמז: רשמו את  $f(z)$  באופן הבא  $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$  כאשר  $\varphi(z_0) = r_0 e^{i\alpha}$ .

התבוננו בסדרות הבאות:  $z_n = z_0 + \frac{1}{n} e^{i\frac{\alpha}{m}}$ ,  $w_n = z_0 + \frac{1}{n} e^{i\frac{\pi+\alpha}{m}}$ .

## תשובות סופיות:

- (1)  $z=1$  קוטב מסדר 1.
- (2)  $z=0$  קוטב מסדר 4.
- (3) אם  $n \geq m$  אז  $z_0$  נקודה סינגולרית מסוג סליקה של  $h(z)$ .  
ואם  $n < m$  אז  $z_0$  קוטב מסדר  $m-n$  של  $h(z)$ .
- (4)  $z=0$  עיקרית.
- (5)  $z=0$  עיקרית.
- (6)  $z_k = 2\pi i k$  קטבים מסדר 1.
- (7)  $z_k = \frac{\pi}{2} + \pi k$  קטבים מסדר 1.
- (8)  $z = -1$  עיקרית ו-  $z=1$  קוטב מסדר 1.
- (9)  $z=2$  עיקרית.
- (10)  $z=0$  לא מבודדת ו-  $z_k = \frac{1}{\pi k}$  קטבים מסדר 1.
- (11)  $z=0$  סליקה ו-  $z_k = \pi k \neq 0$  קטבים מסדר 1.
- (12)  $z=0$  סליקה.
- (13)  $z=2$  אפס מסדר 2,  $z=0$  קוטב מסדר 5,  $z = \pm \pi i$  קטבים מסדר 2.
- (14)  $z=0$  סליקה,  $z = \frac{\pi}{4}$  קוטב מסדר 1.
- (15) א) הוכחה  
ב) הוכחה
- (16)  $z=0$  לא מבודדת.
- $z_k = \frac{1}{k}$  ( $k \neq 0, 2, -2$ ) קטבים מסדר 1.
- $z = \pm \frac{1}{2}$  סליקות.
- (17) הוכחה.
- (18) הוכחה.
- (19) הוכחה.
- (20) הוכחה.

## מיון נקודות סינגולריות באינסוף:

### שאלות:

(1) מיינו את הנקודה הסינגולרית  $\infty$  של הפונקציה  $f(z) = \frac{z^2}{1+z}$ .

(2) מיינו את הנקודה הסינגולרית  $\infty$  של הפונקציה  $f(z) = e^z$ .

### תשובות סופיות:

(1) זה קוטב מסדר 1 של  $f(z)$ .

(2) זאת נקודה סינגולרית עיקרית של  $f(z)$ .

## משפט קסורטי – וייארשטרס:

### שאלות:

(1) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי הנקודה  $z_0 = i$  היא נק' סינגולרית עיקרית של  $f(z) = \cos\left(\frac{1}{z^2 + 1}\right)$ .

ב. הסיקו כי קיים מספר  $z \in \mathbb{C}$  כך ש- $\left|\cos\left(\frac{1}{z^2 + 1}\right) - 100 \tan^2(z) + e^{-z^2} - 5i\right| < 1$ .

### תשובות סופיות:

(1) א. הוכחה.

ב. הוכחה.

# שיטות מתמטיות

## פרק 9 - משפט השארית

### תוכן העניינים

|    |                                              |
|----|----------------------------------------------|
| 62 | 1. מציאת שארית                               |
| 64 | 2. אינטגרלים מרוכבים                         |
| 68 | 3. מסילת חצי-קשת מעגלית                      |
| 71 | 4. מסילת מעגל היחידה                         |
| 73 | 5. מסילת חור מנעול                           |
| 74 | 6. הלמה של זורדן                             |
| 76 | 7. מסילת משולש פיצה                          |
| 77 | 8. חצי מעגל מנוקב                            |
| 79 | 9. שימושים של משפט השארית בהתמרות אינטגרליות |
| 80 | 10. שארית באינסוף                            |

## מציאת שארית:

### שאלות:

חשבו את השאריות של הפונקציות בנקודות הבאות:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z+3}{z+2}, z=-2\right) \quad (1)$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2+9}, z=3i\right) \quad (2)$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z+2}{z^4+2z^3-2z-1}, z=1\right) \quad (3)$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z+2}{z^4+2z^3-2z-1}, z=-1\right) \quad (4)$$

$$(5) \quad \text{נניח כי לפונקציה } \frac{f(z)}{g(z)} \text{ יש קוטב פשוט ב- } z_0 \text{ כאשר ונניח כי } g'(z_0) \neq 0.$$

$$\text{הוכיחו כי } \operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{g(z)}, z_0\right) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\cos(z)}{z}, 0\right) \quad (6)$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\sin(z+1)}{z}, 0\right) \quad (7)$$

$$(8) \quad \text{חשבו את השאריות בנקודות הסינגולריות (הסופיות) של הפונקציה } f(z) = \frac{\tan(z)}{z^2 - \frac{\pi}{4}z}$$

$$(9) \quad \text{חשבו את השאריות בנקודות הסינגולריות (הסופיות) של הפונקציה } f(z) = \frac{1 - \cos(z)}{z^3(z - \pi)}$$

- (10) נניח כי  $f(z)$  פונקציה שלמה בעלת  $n$  אפסים בדיוק. הוכיחו שכל הנקודות הסינגולריות של  $\frac{f'(z)}{f(z)}$  הן קטבים פשוטים וחשבו את השאריות בנקודות אלו.

## תשובות סופיות:

- (1) 1  
(2)  $\frac{1}{6i}$   
(3)  $\frac{3}{8}$   
(4)  $-\frac{3}{8}$   
(5) הוכחה.  
(6) 1  
(7)  $\sin(1)$   
(8) 
$$\operatorname{Res}\left[f(z), \frac{\pi}{2} + \pi k\right] = -\frac{1}{\left[\frac{\pi}{2} + \pi k\right]\left[\frac{\pi}{4} + \pi k\right]}$$
  
(9) 
$$\operatorname{Res}[f(z), 0] = -\frac{1}{2\pi} \quad \operatorname{Res}[f(z), \pi] = \frac{2}{\pi^3}$$
  
(10) 
$$\operatorname{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}, z_k\right] = m_k$$
 כאשר  $z_k$  אפס מסדר  $m_k$  של  $f(z)$ .

## אינטגרלים מרוכבים :

### שאלות:

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\oint_{|z|=1} z \tan(\pi z) dz \quad (1)$$

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z^3(z+1)} dz \quad (2)$$

$$\oint_{|z-i|=3} \frac{e^{z^2}-1}{z^3-iz^2} dz \quad (3)$$

$$\oint_{|z|=1} z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz \quad (4)$$

$$\oint_{|z|=1} \sin\left(\frac{1}{z^2}\right) + e^{z^2} \cos(z) dz \quad (5)$$

(6) נניח כי  $f(z)$  פונקציה שלמה.

הוכיחו כי לכל מסלול  $C$  פשוט וסגור שאינו חותך את הראשית, מתקיים  $\oint_C f\left(\frac{1}{z^2}\right) dz = 0$ .

$$\oint_{|z-a|=a} \frac{z}{z^4-1} dz \quad (a > 1) \quad (7)$$

$$\oint_{|z|=1} \frac{(1+z)^5 \sinh(z)}{z^6} dz \quad (8)$$

$$\oint_{|z|=5} \frac{e^z-1}{z(z-1)(z-i)^2} dz \quad (9)$$

$$\oint_{|z|=6} \cot(z) dz \quad (10)$$

$$\oint_{|z|=1} \sin(z) \sin\left(\frac{3}{z}\right) \cos\left(e^{z^2+\pi} + \ln(2)\right) dz \quad (11)$$

(12) נניח כי  $f(z)$  פונקציה שלמה ומתאפסת רק בנקודה  $z=0$  שם יש לה אפס מסדר 2 ומתקיים  $f''(0)=7$ .

$$\oint_{|z|=1} \frac{\sin(z)}{f(z)} dz \quad \text{חשבו}$$

$$\oint_{|z|=1} z^4 \sin(\bar{z}) dz \quad (13)$$

$$\oint_{|z|=1} \sin(z) \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz \quad (14)$$

$$f(z) = \frac{1}{\cos(z)-1} \quad (15) \quad \text{חשבו את המקדמים של החזקות השליליות בפיתוח של}$$

לטור לורך סביב  $z_0=0$  בתחום  $0 < |z| < 2\pi$ .

הערה: אם  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$  טור לורך של  $f(z)$  בתחום  $R_1 < |z-z_0| < R_2$  אז ניתן

$$\text{לקבל את המקדמים ע"י הנוסחה} \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \quad \text{כאשר } R_1 < r < R_2.$$

(16) הוכיחו את עקרון הארגומנט:

אם  $f(z)$  אנליטית בתחום  $D$  פרט למספר סופי של קטבים ורציפה על

$$\text{השפה } \gamma \text{ ואינה מתאפסת שם על השפה אזי } \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P$$

$N$  - מספר האפסים של  $f(z)$  כולל ריבוי בתחום  $D$ .

$P$  - מספר הקטבים של  $f(z)$  כולל ריבוי בתחום  $D$ .

$$(17) \quad \text{אם } n \in \mathbb{N} \text{ ו- } r > 0 \text{ כך ש- } n < r^2 < n+1 \text{ חשבו את האינטגרל } \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{z}{e^{2\pi i z^2} - 1} dz$$

$$(18) \quad \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^z}{(z+1)^4} dz \quad \text{חשבו}$$

הערה:  $\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^z}{(z+1)^4} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-iR}^{iR} \frac{e^z}{(z+1)^4} dz$  <sup>definition</sup> כאשר המסילה באינטגרל הימני היא מסילת הקו הישר מ- $-iR$  ל- $iR$ .

### תשובות סופיות:

$$\oint_{|z|=1} z \tan(\pi z) dz = 0 \quad (1)$$

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z^3(z+1)} dz = 2\pi i \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{e} \right) \quad (2)$$

$$\oint_{|z-i|=3} \frac{e^{z^2}-1}{z^3-iz^2} dz = 2\pi i \left( 1 - \frac{1}{e} \right) \quad (3)$$

$$\oint_{|z|=1} z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz = -\frac{\pi i}{3} \quad (4)$$

$$\oint_{|z|=1} \sin\left(\frac{1}{z^2}\right) + e^{z^2} \cos(z) dz = 0 \quad (5)$$

(6) הוכחה.

$$\oint_{|z-a|=a} \frac{z}{z^4-1} dz = \frac{\pi i}{2} \quad (7)$$

$$\oint_{|z|=1} \frac{(1+z)^5 \sinh(z)}{z^6} dz = \frac{267}{20} \pi i \quad (8)$$

$$\oint_{|z|=5} \frac{e^z-1}{z(z-1)(z-i)^2} dz = \pi [-3i \cdot e^i + 2i - e] \quad (9)$$

$$\oint_{|z|=6} \cot(z) dz = 6\pi i \quad (10)$$

$$\oint_{|z|=1} \sin(z) \sin\left(\frac{3}{z}\right) \cos\left(e^{z^2+\pi} + \ln(2)\right) dz = 0 \quad (11)$$

$$\oint_{|z|=1} \frac{\sin(z)}{f(z)} dz = \frac{4\pi i}{7} \quad (12)$$

$$\oint_{|z|=1} z^4 \sin(\bar{z}) dz = \frac{2\pi i}{5!} \quad (13)$$

$$\oint_{|z|=1} \sin(z) \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz = 0 \quad (14)$$

$$a_{-1} = -2, \quad a_{-2} = -2, \quad a_n = 0 \text{ for } n \leq -3 \quad (15)$$

(16) הוכחה.

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{z}{e^{2\pi i z^2} - 1} dz = 2n + 1 \quad (17)$$

$$\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^z}{(z+1)^4} dz = \frac{\pi i}{3e} \quad (18)$$

## מסילת חצי קשת מעגלית:

### שאלות:

בכל התרגילים הבאים נסמן את המסלולים הבאים:

$$C_R = \{z = Re^{i\theta} \mid 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

$$\gamma = \{z = x \mid -R \leq x \leq R\}$$

(1) חשבו את  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$  על ידי משפט השארית.

הדרכה:

א. חשבו את האינטגרל  $\oint_{C_R+\gamma} \frac{1}{1+z^2} dz$

ב. הוכיחו כי  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{1}{1+z^2} dz = 0$

ג. הסיקו מהסעיף הקודם כי  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{C_R+\gamma} \frac{1}{1+z^2} dz$

(2) הוכיחו כי  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$  על ידי משפט השארית.

הדרכה:

א. חשבו את האינטגרל  $\oint_{C_R+\gamma} \frac{1}{1+z^4} dz$

ב. הוכיחו כי  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{1}{1+z^4} dz = 0$

ג. הסיקו מהסעיפים הקודמים כי  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

$$(3) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx = \pi\sqrt{2} \quad \text{הוכיחו כי}$$

הדרכה:

א. חשבו את האינטגרל  $\oint_{C_R+\gamma} \frac{z^2+1}{z^4+1} dz$

ב. הוכיחו כי  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{z^2+1}{z^4+1} dz = 0$

ג. הסיקו מהסעיפים הקודמים כי  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx = \pi\sqrt{2}$

$$(4) \quad \text{חשבו את האינטגרל } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^3} dx$$

$$(5) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4+6}{x^6+1} dx$$

$$(6) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+4)^2} dx$$

$$(7) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+4x+13)^2} dx$$

$$(8) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+9)^2} dx$$

$$(9) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+9)}$$

## תשובות סופיות:

$$\oint_{C_R+\gamma} \frac{1}{1+z^2} dz = \pi \quad \text{א} \quad (1)$$

(ב) הוכחה.

(ג) הוכחה.

$$\oint_{C_R+\gamma} \frac{1}{1+z^4} dz = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \quad \text{א} \quad (2)$$

(ב) הוכחה.

(ג) הוכחה.

$$\oint_{C_R+\gamma} \frac{z^2+1}{z^4+1} dz = \pi\sqrt{2} \quad \text{א} \quad (3)$$

(ב) הוכחה.

(ג) הוכחה.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^3} dx = \frac{3\pi}{8} \quad (4)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4+6}{x^6+1} dx = \frac{14\pi}{3} \quad (5)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+4)^2} dx = \frac{\pi}{4} \quad (6)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+4x+13)^2} dx = -\frac{\pi}{27} \quad (7)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+9)^2} dx = \frac{\pi}{6} \quad (8)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+9)} = \frac{5}{96}\pi \quad (9)$$

## מסילת מעגל היחידה:

שאלות:

חשבו את האינטגרלים הבאים:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(2 + \cos(\theta))^2} d\theta \quad (1)$$

$$\int_0^\pi \frac{1}{2 + \cos(3x)} dx \quad (2)$$

$$(3) \quad \text{חשבו את האינטגרל } \int_0^{2\pi} \frac{1}{a \cos(x) + b \sin(x) + c} dx \quad \text{עבור הפרמטרים}$$

הממשיים  $a, b, c$  המקיימים  $c > \sqrt{a^2 + b^2} = 1$ .

הערה: ניתן להשתמש בעובדה כי  $|\sqrt{c^2 - 1} - c| < 1$

$$(4) \quad \text{חשבו את האינטגרל } \int_0^\pi \frac{1}{(a + b \cos \varphi)^2} d\varphi \quad \text{עבור } a > b > 0$$

$$(5) \quad \text{חשבו את האינטגרל } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a + \sin^2 x} dx \quad \text{עבור } |a| > 1$$

$$(6) \quad \text{חשבו לכל } n \in \mathbb{N} \text{ את } \int_0^{2\pi} (1 + 2 \cos \theta)^n \cos(n\theta) d\theta$$

## תשובות סופיות:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(2 + \cos(\theta))^2} d\theta = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \quad (1)$$

$$\int_0^\pi \frac{1}{2 + \cos(3x)} dx = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \quad (2)$$

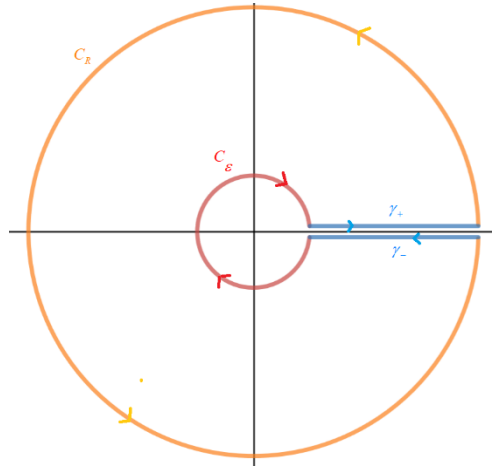
$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a \cos(x) + b \sin(x) + c} dx = \frac{2\pi}{\sqrt{c^2 - 1}} \quad (3)$$

$$\int_0^\pi \frac{1}{(a + b \cos \varphi)^2} d\varphi = \frac{\pi ab}{(a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (4)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a + \sin^2 x} dx = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 + a}} \quad (5)$$

$$\int_0^{2\pi} (1 + 2 \cos \theta)^n \cos(n\theta) d\theta = 2\pi \quad (6)$$

## מסילת חור מנעול:



שאלות:

$$(1) \quad \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx = \pi \quad \text{הוכיחו כי}$$

הדרכה:

נגדיר את המסלולים (כאשר  $R > 1$  ו-  $0 < \epsilon < 1$ ).

$$C_R = \{z = R e^{i\theta} \mid 0 < \theta < 2\pi -\}$$

$$C_\epsilon = \{z = \epsilon e^{i\theta} \mid 0 < \theta < 2\pi -\}$$

$$\gamma_+ = \{z = x e^{0 \cdot i} \mid x: \epsilon \rightarrow R\}$$

$$\gamma_- = \{z = x e^{2\pi i} \mid x: R \rightarrow \epsilon\}$$

א. הוכיחו כי  $\oint_{\gamma_+ + C_R + \gamma_- + C_\epsilon} \frac{1}{\sqrt{z}(1+z)} dz = 2\pi$  כאשר  $\sqrt{z}$  מוגדר בתחום  $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ .

ב. הוכיחו כי  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{1}{\sqrt{z}(1+z)} dz = 0$ .

ג. הוכיחו כי  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_\epsilon} \frac{1}{\sqrt{z}(1+z)} dz = 0$ .

ד. הסיקו מהסעיפים הקודמים כי  $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx = \pi$ .

תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

## הלמה של ז'ורדן:

### שאלות:

חשבו את האינטגרלים הבאים על ידי שימוש בהלמה של ז'ורדן:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx \quad (1)$$

הדרכה:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx = \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2} dx \right\} \quad \text{א. הוכיחו כי}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{e} \quad \text{ב. הוכיחו כי}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3+5x)\sin(x)}{x^4+10x^2+9} dx \quad (2)$$

הדרכה:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3+5x)\sin(x)}{x^4+10x^2+9} dx = \operatorname{Im} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3+5x)e^{ix}}{x^4+10x^2+9} dx \right\} \quad \text{א. הוכיחו כי}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3+5x)e^{ix}}{x^4+10x^2+9} dx = \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{e} + \frac{1}{e^3} \right) \cdot i \quad \text{ב. הוכיחו כי}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^4+1} dx \quad (3)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 \cos(ax)}{(x^2+1)^2} dx \quad (4)$$

## תשובות סופיות:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{e} \quad (1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3 + 5x)\sin(x)}{x^4 + 10x^2 + 9} dx = \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{e} + \frac{1}{e^3} \right) \quad (2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^4 + 1} dx = 0 \quad (3)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 \cos(ax)}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{\pi}{4} (1 - a) e^{-a} \quad (4)$$

## מסילת משולש פיצה:

שאלה:

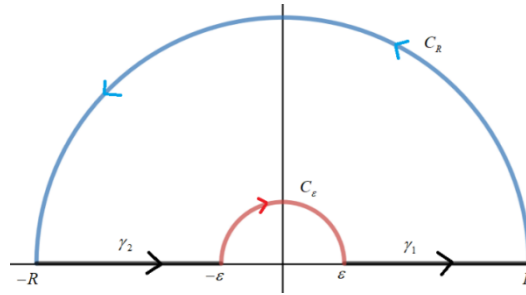
$$(1) \quad \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^{2016}} dx = \frac{\pi}{2016} \cdot \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2016}\right)} \quad \text{כי הוכיחו כי}$$

רמז: התבוננו בפונקציה  $f(z) = \frac{1}{1+z^{2016}}$  ובגזרת מעגל בזווית  $\frac{2\pi}{2016}$ .

תשובה סופית:

(1) הוכחה.

## מסילת חצי מעגל מנוקב:



בתרגילים הבאים נסמן את המסלולים הבאים:

$$\begin{aligned} C_R &= \{z = Re^{i\theta} \mid 0 \leq \theta \leq \pi\} & \gamma_1 &= \{z = x \mid \varepsilon \leq x \leq R\} \\ C_\varepsilon &= \{z = \varepsilon e^{i\theta} \mid \theta: \pi \rightarrow 0\} & \gamma_2 &= \{z = x \mid -R \leq x \leq -\varepsilon\} \\ \gamma &= \gamma_1 + C_R + \gamma_2 + C_\varepsilon \end{aligned}$$

### שאלות:

$$(1) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx = \pi \quad \text{הוכיחו כי}$$

הדרכה:

$$א. \quad \frac{\sin^2(x)}{x^2} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1 - e^{i2x}}{2x^2} \right\} \quad \text{הוכיחו כי}$$

$$ב. \quad \oint_{\gamma} f(z) dz = 0 \quad \text{והסבירו מדוע} \quad f(z) = \frac{1 - e^{i2z}}{2z^2}$$

$$ג. \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{C_\varepsilon} f(z) dz = -\pi \quad \text{ו} \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0 \quad \text{הוכיחו כי}$$

$$(2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^6(x)}{x^6} dx \quad \text{חשבו את האינטגרל}$$

$$(3) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^3 + \pi^2 x} dx \quad \text{חשבו את האינטגרל}$$

$$(4) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} dx \quad \text{חשבו את האינטגרל}$$

$$(5) \quad \text{חשבו את האינטגרל } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos(\alpha x)}{x^2 (x^2 + \beta^2)} dx \text{ לכל } \alpha, \beta > 0.$$

### תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^6(x)}{x^6} dx = \frac{88}{5 \cdot 2^5} \pi \quad (2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^3 + \pi^2 x} dx = \frac{1}{2\pi} - \frac{e^{-\pi}}{\pi} \quad (3)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} dx = \pi \quad (4)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos(\alpha x)}{x^2 (x^2 + \beta^2)} dx = \frac{\pi}{\beta^2} \left( \alpha - \frac{1 - e^{-\alpha\beta}}{\beta} \right) \quad (5)$$

## שימושים של משפט השארית בהתמרות אינטגרליות:

שאלות:

$$(1) \quad \text{נתונה } F(s) = \frac{p(s)}{q(s)} \text{ מנת פולינומים כאשר } \deg(q) \geq \deg(p) + 1.$$

$$\text{הוכיחו כי } L^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\sigma - iR}^{\sigma + iR} e^{st} F(s) ds = \sum_{k=1}^n \text{Res}[e^{st} F(s), s_k]$$

כאשר  $s_k$  אלו הנקודות הסינגולריות של הפונקציה  $F(s)$  והקו  $\text{Re}(s) = \sigma$  נמצא מצד ימין לכל הנקודות הסינגולריות.

$$(2) \quad \text{חשבו התמרת לפלס הפוכה של } F(s) = \frac{1}{(s^2 + 2s + 5)^2}.$$

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{הוכחה.}$$

$$(2) \quad f(t) = \frac{e^{-t}}{16} (\sin(2t) - 2t \cos(2t)).$$

## שארית באינסוף:

## שאלות:

(1) נניח כי  $\infty$  הינה נקודה סינגולרית מבודדת של  $f(z)$ .

$$\text{הוכיחו כי } \operatorname{Res}\left[f(z), \infty\right] = -\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right].$$

(2) נניח כי  $f(z)$  אנליטית במישור המרוכב פרט למספר סופי של נקודות

$$z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}.$$

הוכיחו כי:

$$\operatorname{Res}\left[f(z), z_1\right] + \operatorname{Res}\left[f(z), z_2\right] + \dots + \operatorname{Res}\left[f(z), z_n\right] + \operatorname{Res}\left[f(z), \infty\right] = 0$$

$$(3) \text{ חשבו } \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=10} \frac{e^{\sin\left(\sin\left(\frac{1}{z}\right)\right)} \cos\left(\frac{1}{z}\right)}{z^2 - 1} dz$$

$$(4) \text{ חשבו } \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}{z^2 - 4} dz$$

## תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

(2) הוכחה.

$$(3) \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=10} \frac{e^{\sin\left(\sin\left(\frac{1}{z}\right)\right)} \cos\left(\frac{1}{z}\right)}{z^2 - 1} dz = 0$$

$$(4) \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}{z^4 - 1} dz = -\frac{\sin\left(\frac{1}{2i}\right)}{2i}$$

# שיטות מתמטיות

## פרק 10 - אנליזת פורייה - טורי פורייה

### תוכן העניינים

|                                      |     |
|--------------------------------------|-----|
| 1. הקדמה                             | 81  |
| 2. טור פורייה ממשי                   | 82  |
| 3. טור פורייה מרוכב                  | 83  |
| 4. משפט פרסבל                        | 86  |
| 5. רימן לבג                          | 87  |
| 6. משפט דיריכלה                      | 89  |
| 7. המשכה זוגית ואי זוגית             | 90  |
| 8. גזירה ואינטגרציה של טורי פורייה   | 93  |
| 9. התכנסות במידה שווה של טורי פורייה | 94  |
| 10. טור פורייה בקטע כללי             | 96  |
| 11. משפט הקונבולוציה                 | 98  |
| 12. גרעין דיריכלה                    | 100 |
| 13. גרעין פייר וממוצעי סזארו         | 102 |
| 14. גרעין פוואסון                    | 103 |
| 15. תרגילים מסכמים                   |     |

## טור פורייה ממשי:

### שאלות:

(1) חשבו טור פורייה ממשי לפונקציה  $f(x) = x$  בקטע  $[-\pi, \pi]$ .

(2) מצאו טור פורייה של  $f(x)$  בקטע  $[-\pi, \pi]$  כאשר  $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \pi \\ 0 & -\pi < x < 0 \end{cases}$ .

(3) מצאו טור פורייה של  $f(x)$  בקטע  $[-\pi, \pi]$  כאשר  $f(x) = \sin(|x|)$ .

(4) מצאו טור פורייה של  $f(x)$  בקטע  $[-\pi, \pi]$  כאשר  $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ .

### תשובות סופיות:

$$\sum_{n=1}^{20} -\frac{2}{n} (-1)^n \sin(nx) \quad (1)$$

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2k-1)} \sin((2k-1)x) \quad (2)$$

$$\sin(|x|) \sim \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi} \frac{1}{1-(2k)^2} \cos(2kx) \quad (3)$$

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{\sin(n)}{n} \cos(nx) \quad (4)$$

## טור פורייה מרוכב:

### שאלות:

(1) חשבו טור פורייה מרוכב לפונקציה  $f(x) = x$  בקטע  $[-\pi, \pi]$ .

(2) מצאו טור פורייה של  $f(x)$  בקטע  $[-\pi, \pi]$  כאשר  $f(x) = \begin{cases} -x & -\pi \leq x < 0 \\ 0 & 0 \leq x < \pi \end{cases}$ .

(3) מצאו טור פורייה של  $f(x)$  בקטע  $[-\pi, \pi]$  כאשר  $f(x) = \begin{cases} x & -\pi \leq x < 0 \\ 2x & 0 \leq x < \pi \end{cases}$ .

(4) מצאו טור פורייה של  $f(x)$  בקטע  $[-\pi, \pi]$  כאשר  $f(x) = \begin{cases} 1 & -\pi \leq x < 0 \\ -2 & 0 \leq x < \pi \end{cases}$ .

(5) מצאו טור פורייה מרוכב של  $f(x)$  בקטע  $[-\pi, \pi]$  כאשר  $f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x < 0 \\ \sin(x) & 0 \leq x < \pi \end{cases}$ .

### תשובות סופיות:

$$x \sim \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} i \frac{(-1)^n}{n} e^{inx} \quad (1)$$

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} -\frac{1}{2\pi} \left\{ -\pi \frac{(-1)^n}{in} + \frac{1 - (-1)^n}{n^2} \right\} e^{inx} \quad (2)$$

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left[ -\frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n^2} - 3(-1)^n \frac{\pi}{in} \right] e^{inx} \quad (3)$$

$$f(x) \sim -\frac{1}{2} - \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \frac{3}{\pi i (2k-1)} e^{i(2k-1)x} \quad (4)$$

$$f(x) \sim \frac{1}{4i} e^{ix} - \frac{1}{4i} e^{-ix} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 - (2k)^2} e^{i[2k]x} \quad (5)$$

## משפט פרסבל:

### שאלות:

$$(1) \quad \text{באמצעות טור הפורייה } x \sim \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{n}(-1)^n \sin(nx), \text{ חשבו את הסכום } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

$$(2) \quad \text{נתון כי טור הפורייה הממשי של } f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \pi \\ 0 & -\pi < x < 0 \end{cases} \text{ בקטע } [-\pi, \pi]$$

$$\text{הינו } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \text{ הוכיחו כי } \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2k-1)} \sin((2k-1)x)$$

$$(3) \quad \text{נתונות הפונקציות } f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq \pi \\ x + \pi & -\pi \leq x < 0 \end{cases} \text{ ו- } g(x) = x$$

$$\text{מצאו להן טורי פורייה ממשיים והוכיחו באמצעותם כי } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

$$(4) \quad \text{מצאו טור פורייה מרוכב של הפונקציה } f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x \leq \pi \\ 0 & -\pi < x \leq 0 \end{cases} \text{ ובאמצעותו}$$

$$\text{חשבו את הסכום } \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

$$(5) \quad \text{נתונות הפונקציות } f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq \pi \\ e^{x^2} & -\pi \leq x < 0 \end{cases} \text{ ו- } g(x) = \begin{cases} 0 & 1 < x \leq \pi \\ \frac{1}{x^2+1} & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

$$\text{נסמן את טורי פורייה המרוכבים שלהם ב- } f \sim \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f_n e^{inx}, \quad g \sim \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} g_n e^{inx}$$

$$\text{הוכיחו כי } \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f_n \cdot \overline{g_n} = \frac{1}{8}$$

(6) נתונה פונקציה מחזורית עם מחזור  $2\pi$  :

$$f(x) = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad -\pi \leq x < \pi$$

א. שרטטו את גרף הפונקציה בקטע  $-3\pi < x < 3\pi$ .

ב. פתחו את הפונקציה לטור פורייה ממשי.

ג. חשבו את סכום הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(1+n^2)^2}$ .

(7) הפונקציה  $f(x)$  מוגדרת בקטע  $[-\pi, \pi]$  על ידי הנוסחה:  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+2)^2}} e^{inx}$ .

חשבו  $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+\pi) - f(x)|^2 dx$ .

(8) היעזרו בפיתוח פורייה של הפונקציה  $f(x) = \sin\left(\frac{px}{2}\right)$  בקטע  $[-\pi, \pi]$  כאשר  $p \neq 0$

כדי להוכיח את הזהות  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(1-4n^2)^2} = \frac{\pi^2}{64}$

(9) היעזרו בפיתוח פורייה של הפונקציה  $f(x) = \begin{cases} h^2 & h \leq x \leq \pi \\ 0 & -\pi \leq x \leq h \end{cases}$  בקטע  $[-\pi, \pi]$

כאשר  $0 \neq h \in [-\pi, \pi]$  ובשוויון פרסבל כדי לחשב  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n \cos(2n)}{n^2}$

(10) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו טור פורייה מרוכב של  $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$  בקטע  $[-\pi, \pi]$ .

ב. הוכיחו באמצעות הטור מסעיף א' כי  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n^2}{(1-4n^2)^2} = \frac{\pi^2}{32}$

ג. הסיקו כי  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(1-4n^2)^2} = \frac{\pi^2}{64}$

## תשובות סופיות:

$$\frac{\pi^2}{6} \quad (1)$$

(2) הוכחה.

(3) הוכחה.

$$\frac{\pi^2}{4} \quad (4)$$

(5) הוכחה.

$$\sinh(x) \sim -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1} \frac{\sinh(\pi)(-1)^n}{\pi} \sin(nx) \quad \text{ב.} \quad (6) \quad \text{א. ראו סרטון.}$$

ג.  $\approx 0.769$ 

$$8\pi \quad (7)$$

(8) הוכחה.

$$\frac{\pi^2 - 4}{4} \quad (9)$$

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{4n(-i)(-1)^n}{\pi(1-4n^2)} e^{inx} \quad \text{א.} \quad (10) \quad \text{ב. הוכחה.} \quad \text{ג. ראו סרטון.}$$

## רימן לבג:

### שאלות:

(1) חשבו  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{x^2+2x} \cos(\sqrt{|x|}) \sin(nx) dx$

(2) חשבו  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} \frac{n}{(nt)^2 + 1} e^{i \cdot n^2 t} dt$

(3) הוכיחו כי  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( n \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^x \frac{se^{s^2}}{\sqrt{s^2 + 2017}} e^{inx} dx \right) = 0$

### תשובות סופיות:

(1) 0

(2) 0

(3) הוכחה.

## משפט דיריכלה:

### שאלות:

(1) בתרגיל קודם פיתחנו את הפונקציה  $f(x) = x$  בקטע  $[-\pi, \pi]$  לטור פורייה

$$. x \sim \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{n} (-1)^n \sin(nx)$$

$$. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$$

$$. x = \frac{\pi}{2} \text{ רמז: הציבו}$$

$$(2) \quad f(x) = \begin{cases} 2 + \frac{2x}{\pi} & -\pi < x < 0 \\ 2 & 0 < x < \pi \end{cases} \quad \text{נתונה פונקציה מחזורית עם מחזור } 2\pi$$

א. שרטטו את גרף הפונקציה בתחום  $[-3\pi, 3\pi]$ .

ב. פתחו את הפונקציה לטור פורייה ממשי.

$$. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad \text{ג. הוכיחו כי}$$

(3) במרחב הפונקציות  $L^2_{PC}[-\pi, \pi]$  נתונה הפונקציה  $f(x) = x^2$ .

א. חשבו את טור פורייה הממשי של  $f(x)$ .

$$. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \quad \text{ב. חשבו את הטור}$$

$$. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{ג. חשבו את הטור}$$

$$. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{ד. חשבו את הטור}$$

(4) היעזרו בפיתוח פורייה של הפונקציה  $f(x) = \cos(ax)$  בקטע  $[-\pi, \pi]$  כאשר  $a$

אינו מספר שלם כדי להוכיח את הזהויות:

$$. \frac{1}{\sin(\pi a)} = \frac{1}{\pi a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[ \frac{1}{\pi a + \pi n} + \frac{1}{\pi a - \pi n} \right] \quad \text{א.}$$

$$. \cot(\pi a) = \frac{1}{\pi a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi a + \pi n} - \frac{1}{\pi a - \pi n} \quad \text{ב.}$$

### תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

(2) א. ראו סרטון.

ב.  $f(x) \sim \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 (2k-1)^2} \cos([2k-1]x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{\pi n} \sin(nx)$  ג. הוכחה.

(3) א.  $x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} 4 \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$  ב.  $\frac{\pi^4}{90}$  ג.  $\frac{\pi^2}{-12}$  ד.  $\frac{\pi^2}{6}$

(4) א. הוכחה. ב. הוכחה.

## המשכה זוגית ואי זוגית:

### שאלות:

(1) נתונה הפונקציה  $f(x) = x$  בקטע  $[0, \pi]$ .

מצאו לה טור קוסינוסים:  $f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$  והוכיחו כי לכל  $0 < x < \pi$

$$x = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{\pi(2k-1)^2} \cos([2k-1]x) \text{ מתקיים}$$

(2) נתונה הפונקציה  $f(x) = 1$  בקטע  $[0, \pi]$ .

מצאו לה טור סינוסים:  $f \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$  והוכיחו כי:

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)} \sin([2k-1]x) \text{ מתקיים } 0 < x < \pi \text{ לכל א.}$$

$$\text{ב. } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)} = -\frac{\pi}{4}$$

### תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

(2) א. הוכחה. ב. הוכחה.

## גזירה ואינטגרציה של טורי פורייה:

### שאלות:

(1) תהי  $f(x)$  פונקציה רציפה בקטע  $[-\pi, \pi]$  המקיימת  $f(-\pi) = f(\pi)$  ונניח כי היא גזירה למקוטעין ברציפות (כלומר נניח  $f'(x) \in L^2_{PC}[-\pi, \pi]$ ).

נסמן  $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$  אזי הטור מתכנס בהחלט.

(2) נתונה הפונקציה  $f(x) = x(\pi - x)$  בקטע  $[0, \pi]$ .

א. פתחו את הפונקציה לטור סינוסים.

ב. לאיזו פונקציה מתכנס הטור?

שרטטו את גרף הפונקציה (לפחות 3 מחזורים).

ג. הוכיחו כי  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$ .

ד. הוכיחו כי  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$ .

ה. מצאו פיתוח לטור קוסינוסים של  $g(x) = \frac{\pi x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$  בקטע  $[0, \pi]$ .

ו. בעזרת הטור הקודם הוכיחו כי  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$ . רמז: הציבו  $x=0$ .

(3) נתונה הפונקציה  $f(x) = e^{x^2}$  בקטע  $[-\pi, \pi]$ .

נסמן  $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| e^{inx}$  פיתוח פורייה מרוכב.

א. האם הטור  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|$  מתכנס?

ב. האם הטור  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} n |c_n|$  מתכנס?

ג. האם הטור  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 |c_n|^2$  מתכנס?

(4) נתבונן בטור הפורייה  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{in(x+i)}$ .

כמה פעמים ניתן לגזור את  $f(x)$ ?

(5) ענו על הסעיפים הבאים :

א. הוכיחו כי  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi-x}{2}$  בקטע  $(0, 2\pi)$ .

ב. נסמן  $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$ . מצאו את  $g(x)$  באופן מפורש (ללא טור) בקטע  $(0, 2\pi)$ .

(6) תהי  $f(x)$  גזירה ברציפות  $k-1$  פעמים בקטע  $[-\pi, \pi]$ , גזירה ברציפות למקוטעין  $k$

פעמים כך שמתקיים  $f^{(j)}(-\pi) = f^{(j)}(\pi)$  לכל  $j = 0, 1, \dots, k-1$ . נסמן  $f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ .

הוכיחו כי  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^k c_n) = 0$ .

(7) ענו על הסעיפים הבאים :

א. תהי  $f(x) \in L^2_{PC}[-\pi, \pi]$  פונקציה גזירה ברציפות המקיימת  $f(-\pi) = f(\pi)$

ו-  $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0$ . הראו כי מתקיים  $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx$ .

ב. תהי  $f(x) \in L^2_{PC}[0, \pi]$  פונקציה גזירה ברציפות המקיימת  $f(0) = f(\pi) = 0$ .

הראו כי מתקיים  $\int_0^{\pi} |f(x)|^2 dx \leq \int_0^{\pi} |f'(x)|^2 dx$ .

(8) נגדיר  $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} e^{in^2 x}$ .

א. הוכיחו כי  $f(x)$  רציפה.

ב. הוכיחו כי  $f(x)$  אינה גזירה ברציפות.

(9) נגדיר  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+1} \sin(n^{2.5} x)$

א. הוכיחו כי  $f(x)$  רציפה.

ב. הוכיחו כי  $f(x)$  אינה גזירה ברציפות.

(10) נסמן  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^{1.4}} + \frac{\sin(nx)}{n^{2.8}}$

א. האם  $f$  רציפה?

ב. האם  $f$  גזירה ברציפות?

(11) נגדיר  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^4}$ . הוכיחו כי  $f(x)$  אינה גזירה 4 פעמים ברציפות.

(12) נסמן  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{3.1} + i \cdot n^{2.2}} \cdot e^{inx}$ . הוכיחו כי  $f$  גזירה ברציפות פעמיים.

### תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

$$(2) \quad f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(2k-1)^3} \sin([2k-1]x) \quad [0, \pi] \quad \text{א.}$$

ב. ראו סרטון. ג. הוכחה. ד. הוכחה.

$$\text{ה.} \quad [0, \pi] \quad \frac{\pi x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \sim \frac{\pi^3}{12} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-8}{\pi(2k-1)^4} \cos([2k-1]x) \quad \text{ו. הוכחה.}$$

$$(3) \quad \text{א.} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{n} \cdot n c_n \right| \leq \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 |c_n|^2 < \infty \quad \text{ב.} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} n |c_n| < \infty$$

$$\text{ג.} \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 |c_n|^2$$

(4) ראו סרטון.

$$(5) \quad \text{א. הוכחה.} \quad \text{ב.} \quad -\frac{\pi}{2} \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{12} + \frac{\pi^2}{6} x$$

(6) הוכחה.

(7) א. הוכחה. ב. הוכחה.

(8) א. הוכחה. ב. הוכחה.

(9) א. הוכחה. ב. הוכחה.

$$(10) \quad \text{א.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2.8}} < \infty \quad \text{ב.} \quad \text{נניח בשלילה כי } f \text{ גזירה ברציפות.}$$

(11) הוכחה.

(12) הוכחה.

## התכנסות במידה שווה של טורי פורייה:

### שאלות:

$$(1) \quad \text{תהי הפונקציה} \quad g(x) = \begin{cases} -x & -\pi \leq x < 0 \\ \pi - x & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

א. חשבו את טור פורייה הממשי של  $g(x)$ .

$$\text{ב. עבור } -\pi \leq x \leq \pi \text{ נגדיר את הפונקציה } h(x) = a \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \int_{-\pi}^x g(t) dt$$

כאשר  $g(x)$  מוגדרת בסעיף א'.

עבור אילו ערכים של  $a$  מתכנס טור פורייה של  $h(x)$  במידה שווה ל- $h(x)$  בקטע  $[-\pi, \pi]$ .

$$(2) \quad \text{נגדיר פונקציה } f(x) = |\sin(x)| \text{ במרחב } L_{PC}^2([-\pi, \pi]) \text{ ונסמן ב-} f'(x) \text{ את הנגזרת שלה.}$$

א. חשבו את טורי הפורייה הממשיים של  $f$  ושל  $f'$ .

ב. לאילו פונקציות מתכנסים נקודתית טורי הפורייה שחישבתם?

שרטטו את הגרפים של פונקציות אלו בתחום  $[-3\pi, 3\pi]$ .

ג. באילו קטעים סגורים מתכנס טור הפורייה של  $f$  במידה שווה?

ד. באילו קטעים סגורים מתכנס טור הפורייה של  $f'$  במידה שווה?

### תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } g(x) \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin(2k \cdot x) \quad \text{ב. } a = -\frac{\pi^2}{2}$$

$$(2) \quad \text{א. } f(x) \sim \left(\frac{2}{\pi}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \left[ \frac{-4}{(2k+1)(2k-1)} \right] \cos(2k \cdot x)$$

$$\text{ב. } f'(x) = \begin{cases} \cos x & 0 < x < \pi \\ -\cos x & -\pi < x < 0 \end{cases} \quad f'(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \left[ \frac{8k}{(2k+1)(2k-1)} \right] \sin(2k \cdot x)$$

ג.  $f(x)$  פונקציה רציפה, מחזורית- $2\pi$ , הנגזרת רציפה למקוטעין, ולכן טור פורייה שלה יתכנס אליה במידה שווה על פני כל הישר הממשי.

ד. טור פורייה של  $f'(x)$  יתכנס אליה במידה שווה בכל תת-קטע סגור שאינו מכיל

נקודות אי-רציפות של הפונקציה, כלומר בקטעים כאלו:  $[\pi n + \delta, \pi(n+1) - \delta]$  לכל  $0 < \delta < \pi$  ולכל  $n$  שלם.

## טור פורייה בקטע כללי:

### שאלות:

(1) חשבו טור פורייה ממשי לפונקציה  $f(x) = x^2$  בקטע  $[0, 2\pi]$ .

(2) תהי הפונקציה  $f(x) = \min\{1, |x|\}$ .

א. חשבו את מקדמי פורייה  $a_n$  ו- $b_n$  של טור פורייה של  $f(x)$  בקטע  $[-2, 2]$ .

ב. חשבו את  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$ ,  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$ .

(3) נתונה הפונקציה  $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$  בקטע  $[0, 2]$ .

א. פתחו את הפונקציה לטור פורייה מרוכב.

ב. לאיזו פונקציה מתכנס הטור? שרטטו את גרף הפונקציה (לפחות 3 מחזורים).

ג. חשבו את סכום הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+4\pi^2 n^2}$ .

(4) פתחו את  $f(x) = |x|$  לטור פורייה בקטע  $[-1, 1]$ .

(5) פתחו את  $f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & 1 < x < 2 \end{cases}$  לטור סינוסים בקטע  $[0, 2]$ .

(6) נתונה פונקציה  $f(x)$  המקיימת  $f(x) = f(x+2)$  ובנוסף  $f(x) = 2-|x|$   $-1 \leq x < 1$ .

א. פתחו את הפונקציה לטור פורייה ממשי.

ב. חשבו את סכום הטור  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}$ .

ג. חשבו את הסכום  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$ .

ד. האם טור הפורייה של  $f(x)$  מתכנס במידה שווה בתחום  $[-1, 1]$ ?

(7) מצאו טור קוסינוסים  $f(x) = x$  בקטע  $[0, 3]$ .

(8) פתחו את  $f(x) = \cos(2x)$  לטור סינוסים בקטע  $[0, \pi]$ .

### תשובות סופיות:

$$x^2 \sim \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \cdot \cos nx - \frac{4\pi}{n} \cdot \sin nx \quad 0 \leq x \leq 2\pi \quad (1)$$

$$b_n = 0, \quad a_n = \begin{cases} \frac{-4}{\pi^2 [2k-1]^2} & n = 2k-1 \\ \frac{-8}{\pi^2 [4k-2]^2} & n = 4k-2 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{[2k-1]^4} = \frac{\pi^4}{96}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad \text{ב.}$$

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(e-1)(1+2in\pi)}{1+4n^2\pi^2} e^{in\pi x} \quad \text{א.} \quad (3)$$

ג.  $\frac{3-e}{4(e-1)}$  ב. ראו סרטון.

$$|x| \sim \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(\pi[2k-1]x) \quad (4)$$

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-8 \cos(\pi k)}{\pi^2 [2k-1]^2} \sin\left(\frac{\pi[2k-1]x}{2}\right) \quad (5)$$

$$f(x) \sim \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)^2 \pi^2} \cos([2k-1]\pi x) \quad \text{א.} \quad (6)$$

ג.  $\frac{\pi^2}{8}$  ב.  $\frac{\pi^4}{96}$

ד. אם  $f$  רציפה בקטע  $[a, b]$ ,  $f(a) = f(b)$ , ו- $f'$  רציפה למקוטעין אזי טור פורייה של  $f$  מתכנס במ"ש ל- $f$  בקטע  $[a, b]$ .

$$f(x) \sim \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-12}{\pi^2 (2k-1)^2} \cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{3}x\right) \quad (7)$$

$$\cos(2x) \sim -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{4[2k-1]}{4-[2k-1]^2} \sin([2k-1]x) \quad (8)$$

## משפט הקונבולוציה:

### שאלות:

- (1) הוכח את הטענה כי אם  $f(x)$ ,  $g(x)$  רציפות למקוטעין ומחזוריות- $2\pi$  אז  $(f * g)_{(x)}$  מחזוריות- $2\pi$ .
- (2) הוכח את הטענה כי אם  $f(x)$ ,  $g(x)$  רציפות למקוטעין, מחזוריות- $2\pi$  ופונקציות זוגיות אז  $(f * g)_{(x)}$  זוגית.
- (3) נתונה  $f(x)$  רציפה למקוטעין ומחזורית- $2\pi$  כך שלכל  $x \in [-\pi, \pi]$  מתקיים  $f(x) = \sqrt{2\pi} \cdot \chi_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}(x)$ .  
חשבו לכל  $x$  ממשי את הקונבולוציה  $(f * f)_{(x)}$ .  
הערה:  $\chi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [a,b] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$
- (4) נתונות  $f(x)$ ,  $g(x)$  רציפות למקוטעין ומחזוריות- $2\pi$  כך שלכל  $x \in [-\pi, \pi]$  מתקיים  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = \cos(x)$ .  
חשבו לכל  $x$  ממשי את הקונבולוציה  $(f * g)_{(x)}$ .
- (5) נתונות  $f(x)$ ,  $g(x)$  רציפות למקוטעין ומחזוריות- $2\pi$  כך שלכל  $x \in [-\pi, \pi]$  מתקיים  $f(x) = x$ ,  $g(x) = \chi_{[0,1]}(x)$ .  
חשבו לכל  $x$  ממשי את הקונבולוציה  $(f * g)_{(x)}$ .

## תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

(2) הוכחה.

(3)  $\pi - x$ (4) לכל  $x$ ,  $-\pi \leq x \leq \pi$   $(f * g)_{(x)} = -2 \cos(x)$ 

$$(f * g)_{(x)} = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} (x^2 - (x-1)^2) & -\pi+1 \leq x \leq \pi \\ \frac{1}{4\pi} [x^2 - (x+(2\pi-1))^2] & -\pi \leq x \leq -\pi+1 \end{cases} \quad (5)$$

## גרעין דיריכלה:

### שאלות:

(1) נגדיר  $D_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx}$  (גרעין דיריכלה).

א. הוכיחו כי  $D_n(x) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(kx)$ .

ב. הוכיחו כי עבור  $x \neq 2\pi m$   $D_n(x) = \frac{\sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right]}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ .

(2) חשבו לכל ערך של  $n$  שלם את ערכו של הביטוי  $I(n) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right]}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \sin(100x) dx$ .

(3) הוכיחו כי  $I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right] \left[\sin\left(\frac{1}{2}x\right) + \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right]\right]}{\sin^2\left(\frac{1}{2}x\right)} dx = 2(n+1)$  לכל  $n \in \mathbb{N}$ .

(4) נניח כי  $f(x)$  רציפה למקוטעין בקטע  $[-\pi, \pi]$ . נסמן  $S_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$  טור פורייה חלקי.

הוכיחו כי  $(f * D_n)_x = S_n(x)$ .

(5) חשבו את הגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\arctg(x-1) \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right]}{e^{(x-1)^2} \sin\left(\frac{1}{2}x\right)} dx$ .

$$(6) \quad \text{נגדיר } S(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin \frac{2001}{2} t}{\sin t} 2 \cos \frac{t}{2} \cos^{17} \left( e^{\sqrt{|x-t|}} \right) dt$$

יהיו  $a_n$ ,  $b_n$  מקדמי פורייה הממשיים ו-  $c_n$  מקדמי פורייה המרוכבים, של הפונקציה  $S(x)$ .  
חשבו את  $b_{500}$ ,  $c_{1001}$ .

רמז:  $S_N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) f(x-t) dt$  כאשר  $D_N(t)$  גרעין דיריכלה מסדר  $N$  ו-  $S_N$  טור פורייה החלקי ה-  $N$  -י של  $f$ .

### תשובות סופיות:

(1) א. הוכחה. ב. הוכחה.

(2) 0

(3) הוכחה.

(4) הוכחה.

(5)  $-\frac{\pi^2}{2e}$

(6)  $c_{1001} = 0$ ,  $b_{500} = 0$

## גרעין פייר וממוצעי סזארו:

### שאלות:

(1) נסמן  $D_n(x)$  גרעין דיריכלה. נגדיר את גרעין פייר כך:  $K_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(x)$ .

א. הראו כי לכל  $x \neq 2\pi m$

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1} \frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

ב. הראו כי  $K_n(x) = \sum_{k=-n}^n \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) e^{ikx}$

(2) הוכיחו כי  $K_n(x) \geq 0$  לכל  $x$  כאשר  $K_n(x)$  גרעין פייר.

(3) הוכיחו כי  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(x) dx = 1$

(4) הוכיחו כי לכל  $0 < \delta < \pi$  מתקיים  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\delta < |x| < \pi} K_n(x) dx = 0$

(5) נניח כי  $f(x)$  רציפה למקוטעין, מחזורית- $2\pi$  וכי  $m \leq f(x) \leq M$  לכל  $x$  ממשי. הוכיחו כי  $m \leq \sigma_n(x) \leq M$  לכל  $n$  טבעי ולכל  $x$  ממשי כאשר  $\sigma_n(x)$  סדרת ממוצעי סזארו של הפונקציה  $f(x)$ .

(6) תהי  $\varphi(x)$  רציפה בקטע  $[-\pi, \pi]$  ונניח כי:

i.  $\varphi(x) \geq 0$

ii.  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) dx = 1$

iii. קיים  $0 < \delta_0 < \pi$  כך שלכל  $|x| > \delta_0$  מתקיים  $\varphi(x) = 0$ .

נגדיר  $F_n(x) = n\varphi(nx)$  ונרחיב אותה באופן מחזורי.

הוכיחו כי  $F_n(x)$  מהווה גרעין חיובי.

**תשובות סופיות:**

- |   |           |           |
|---|-----------|-----------|
| 1 | א. הוכחה. | ב. הוכחה. |
| 2 | הוכחה.    |           |
| 3 | הוכחה.    |           |
| 4 | הוכחה.    |           |
| 5 | הוכחה.    |           |
| 6 | הוכחה.    |           |

## גרעין פוואסון:

### שאלות:

(1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי לכל  $0 < r < 1$  מתקיים  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{inx} = \frac{1-r^2}{1-2r \cos(x)+r^2}$

ב. גרעין פוואסון נתון על ידי  $P_r(x) = \frac{1-r^2}{1-2r \cos(x)+r^2}$ . תהי  $f(x)$  פונקציה

רציפה למקוטעין ומחזורית  $2\pi$  וטור פורייה שלה נתון על ידי  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$

הראו כי  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) P_r(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{inx}$

ג. הוכיחו את התכונות הבאות של גרעין פוואסון:

i.  $P_r(x) \geq 0$  לכל  $x$  ממשי.

ii. לכל  $0 < \delta < \pi$  מתקיים  $P_r(x) \xrightarrow{r \rightarrow 1^-} 0$  במידה שווה לפי  $x$  בתחום  $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$ .

iii. מתקיים  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(x) dx = 1$ .

ד. תהי  $f(x)$  רציפה ומחזורית  $2\pi$  ועם טור פורייה  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ .

הוכיחו כי  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{inx} \xrightarrow{r \rightarrow 1^-} f(x)$  במידה שווה.

**הערה: ניתן להיעזר במשפט הבא:** אם סדרת פונקציות  $P_r(x)$  מקיימת את התכונות הבאות:

i.  $P_r(x) \geq 0$  לכל  $x$  ממשי.

ii. לכל  $0 < \delta < \pi$  מתקיים  $P_r(x) \xrightarrow{r \rightarrow 1^-} 0$  במידה שווה לפי  $x$  בתחום  $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$ .

iii. מתקיים  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(x) dx = 1$ .

אזי  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) P_r(t) dt \xrightarrow{r \rightarrow 1^-} f(x)$  במידה שווה.

### תשובות סופיות:

(1) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. הוכחה.

## תרגילים מסכמים:

### שאלות:

#### 1) טור פורייה:

א. מצאו טור פורייה של הפונקציה  $f(t) = e^{iat}$  בתחום  $-\pi \leq t \leq \pi$  כאשר  $\alpha$  הוא מספר ממשי לא שלם.

ב. הראו שמתקיים  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2\alpha}{\alpha^2 - n^2} = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} - \frac{1}{\alpha}$

ג. הראו שמתקיים  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{[\alpha - n]^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi\alpha)}$

ד. הראו שמתקיים  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)((2n+1)^2 - \alpha^2)} = \frac{\pi}{4\alpha^2} \left( \frac{1}{\cos\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right)} - 1 \right)$

#### 2) נגדיר $f(x) = |x|$ במרחב $L_{PC}^2([-\pi, \pi])$ ונסמן ב- $f'(x)$ את הנגזרת שלה.

א. חשבו טור פורייה ממשי של  $f$ .

ב. לאיזו פונקציה מתכנס הטור הבא נקודתית בתחום  $(-\infty, \infty)$ ?

$$\sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(5x) + \frac{1}{7}\sin(7x) + \dots$$

ג. חשבו את הטור  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2n+1}\right)^2$

#### 3) תהי $f \in L_{PC}^2([-\pi, \pi])$ .

נסמן ב- $c_n$  את מקדמי פורייה (המרוכבים) של  $f$ .

נסמן  $d_n = \operatorname{Re}\{c_n\}$  ובנוסף נתון כי:

•  $f$  ממשית.

•  $f$  מתאפסת על הקטע  $[-\pi, 0]$ .

• מתקיים השוויון  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{inx} = x^2 e^{|x|} \cos(x)$

מצאו את  $f$ .

(4) תהי  $f(x) = \cos(2x)$  המקיימת  $2\pi$  מחזור בעלת זוגית בעלת מחזור  $2\pi$

בתחום  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  ו-  $f(x) = -1$  בתחום  $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ .

מצאו את טור פורייה הממשי של  $f$  וחשבו את הסכום  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[2n-1][2n+3](2n+1)}$ .  
האם טור פורייה של  $f$  מתכנס אליה במידה שווה? נמקו.

(5) נתונה פונקציה  $f(x)$  רציפה למקוטעין ומחזורית  $2\pi$ .

נסמן  $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{inx}$  ויהי  $h > 0$  פרמטר כלשהו.

מצאו את מקדמי פורייה של  $h(x) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h f(t+x) dt$  כתלות ב-  $f_n$ .

### תשובות סופיות:

(1) א.  $e^{i\alpha t} \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(\pi\alpha)}{[\alpha-n]\pi} \cdot e^{in \cdot t}$ . ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. הוכחה.

(2) א.  $f(x) \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} -\frac{4}{\pi(2k+1)^2} \cos([2k+1]x)$ .

ב.  $\begin{cases} \frac{\pi}{4} & \pi k < x < \pi(k+1) \\ -\frac{\pi}{4} & \pi(k-1) < x < \pi k \\ 0 & x = \pi k \end{cases}$ , כאשר  $k$  מספר שלם. ג.  $\frac{\pi^2}{8}$ .

(3)  $f(x) = \begin{cases} 2x^2 e^{|x|} \cos(x) & 0 < x < \pi \\ 0 & -\pi < x \leq 0 \end{cases}$

(4) התכנסות במידה שווה בקטע  $[-\pi, \pi]$  אם  $f$  רציפה בקטע  $[-\pi, \pi]$ ,  $f(-\pi) = f(\pi)$ .

ו-  $f' \in E[-\pi, \pi]$  אזי טור פורייה של  $f$  מתכנס במ"ש ל-  $f$  בקטע  $[-\pi, \pi]$ .

(5)  $f_0$

# שיטות מתמטיות

## פרק 11 - אנליזת פורייה - התמרת פורייה

### תוכן העניינים

|           |                                    |
|-----------|------------------------------------|
| 105       | 1. מבוא כללי                       |
| 107       | 2. נוסחת כיווץ והזזה               |
| 109       | 3. נוסחת הנגזרת                    |
| 110       | 4. נוסחאות כפל באקספוננט ומודולציה |
| 112       | 5. נוסחת המומנט                    |
| 114       | 6. נוסחת ההתמרה ההפוכה             |
| (ללא ספר) | 7. נוסחת התמרה כפולה               |
| 115       | 8. משפט פלנשראל                    |
| 116       | 9. משפט הקונבולוציה                |
| 120       | 10. תרגילים מסכמים                 |

## מבוא כללי:

### שאלות:

$$(1) \quad \chi_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-1,1] \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{חשבו את התמרת פורייה של}$$

$$(2) \quad f(x) = \begin{cases} 1-|x| & |x| < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{מצאו התמרת פורייה עבור}$$

$$(3) \quad f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{מצאו התמרת פורייה עבור}$$

$$(4) \quad f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 2 & 1 < |x| < 2 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{מצאו התמרת פורייה עבור}$$

$$(5) \quad \text{הוכיחו כי התמרת פורייה של } f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & x > 0 \\ e^{bx} & x \leq 0 \end{cases} \text{ כאשר } a, b > 0 \text{ קבועים הינה}$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{b-i\omega} + \frac{1}{a+i\omega} \right]$$

$$(6) \quad f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{מצאו התמרת פורייה של}$$

$$(7) \quad f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ 2 & 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{מצאו התמרת פורייה עבור}$$

$$(8) \quad f(x) = \begin{cases} e^{-x} & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{מצאו התמרת פורייה עבור}$$

$$(9) \quad \text{הוכיחו התמרת פורייה של } f(x) = \begin{cases} e^{2ix} & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \text{ הינה } f(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin[2-\omega]}{2-\omega}$$

$$(10) \quad f(x) = \begin{cases} \sin(x) & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{מצאו התמרת פורייה של}$$

$$(11) \quad \text{חשבו את התמרת פורייה של } f(x) = \begin{cases} x & |x| < a \\ 0 & \text{else} \end{cases} \text{ עבור } a > 0$$

$$(12) \quad \text{האם קיימת } f \in L^1_{PC}(\mathbb{R}) \text{ כך ש-} f(\omega) = \begin{cases} 1-|\omega| & |\omega| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & |\omega| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

## תשובות סופיות:

$$\frac{\sin(\omega)}{\pi\omega} \quad (1)$$

$$f(\omega) = \frac{1 - \cos(\omega)}{\pi\omega^2} \quad (2)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi(1+i\omega)} \quad (3)$$

$$f(\omega) = \frac{2\sin(2\omega) - \sin(\omega)}{\pi\omega} \quad (4)$$

$$\text{הוכחה.} \quad (5)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(\omega) + i[\cos(\omega) - 1]}{\omega} \quad (6)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 + e^{-i\omega} - 2e^{-i2\omega}}{i\omega} \quad (7)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{(1-i)\omega} - 1}{1-i\omega} \quad (8)$$

$$\text{הוכחה.} \quad (9)$$

$$f(\omega) = -i \cdot \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\sin([1-\omega])}{1-\omega} - \frac{\sin([1+\omega])}{1+\omega} \right\} \quad (10)$$

$$f(\omega) = -\frac{1}{\pi} i \frac{\sin(\omega a) - \omega a \cos(\omega a)}{\omega^2} \quad (11)$$

$$\omega = \pm \frac{1}{2} \quad \text{לא. אינה רציפה בנקודות} \quad (12)$$

## נוסחת כיווץ והזזה:

### שאלות:

(1) מצאו התמרת פורייה של  $\chi_{[-r,r]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-r,r] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$  כאשר  $r > 0$ .

(2) מצאו התמרת פורייה של  $f(x) = e^{-4x^2-4x-1}$  על ידי שימוש בעובדה

$$F\{e^{-x^2}\} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}} \quad \text{כי}$$

(3) נתונה פונקציה  $g(x) \in G(R)$  בעלת התמרת פורייה  $g(\omega)$ .

מצאו פונקציה  $f(x)$  (כתלות ב- $g(x)$ ) בעלת התמרת פורייה  $g(\omega)\cos(\omega)$ .

(4) מצאו התמרת פורייה של  $f(x) = e^{-ax^2}$  כאשר  $a > 0$ .

$$F\{e^{-x^2}\} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}} \quad \text{רמז:}$$

(5) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא  $f(\omega) = \cos(4\pi\omega) \cdot \frac{\sin(2\omega)}{\omega}$ .

$$F\{\chi_{[-1,1]}(x)\} = \frac{\sin(\omega)}{\pi\omega} \quad \text{רמז:}$$

## תשובות סופיות:

$$\frac{\sin(\omega \cdot r)}{\pi \omega} \quad (1)$$

$$f(\omega) = \frac{e^{\frac{i\omega}{2}}}{4\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{16}} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{g(x+1) + g(x-1)}{2} \quad (3)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} e^{-\frac{(\omega)^2}{4a}} \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} \begin{cases} 1 & 4\pi - 2 \leq x \leq 4\pi + 2 \text{ or } -4\pi - 2 \leq x \leq -4\pi + 2 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (5)$$

## נוסחת הנגזרת:

### שאלות:

(1) נניח כי  $f(x) \in G$  גזירה, מקיימת  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$ ,  $f'(x) \in G$  ו-  $f(\omega) = \frac{\omega}{1 + \omega^{30}}$ . מצאו התמרת פורייה של  $f'(x) \cos(2x)$ .

(2) יהי  $a$  ממשי כלשהו. הוכיחו כי  $F \left\{ \frac{x}{(x^2 + a^2)^2} \right\}_\omega = \left( -\frac{1}{2} \right) (i\omega) \frac{1}{2|a|} e^{-|a\omega|}$ .

(3) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא  $f(\omega) = \omega^2 e^{-|\omega|}$ . רמז:  $F \left\{ \frac{1}{1+x^2} \right\} = \frac{1}{2} e^{-|x|}$ .

### תשובות סופיות:

$$\frac{i \cdot \frac{(\omega-2)^2}{1+(\omega-2)^{30}} + i \cdot \frac{(\omega+2)^2}{1+(\omega+2)^{30}}}{2} \quad (1)$$

(2) הוכחה.

$$f(x) = (-2) \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3} \quad (3)$$

## נוסחאות כפל באקספוננט ומודולציה:

### שאלות:

$$(1) \quad F\left\{\sin(cx)e^{-|x|}\right\}_{(\omega)} = \frac{1}{\pi i} \frac{2c \cdot \omega}{\left[1 + (\omega - c)^2\right] \left[1 + (\omega + c)^2\right]} \quad \text{הוכיחו כי התמרת פורייה של}$$

$$(2) \quad f(\omega) = \frac{\sin(\omega - 1)}{\omega - 1} - \frac{\sin(\omega + 1)}{\omega + 1} \quad \text{מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא}$$

$$(3) \quad \text{הוכיחו כי התמרת פורייה של } g(x) = \begin{cases} \sin(ax)e^{-bx} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad \text{כאשר } a, b > 0 \text{ קבועים,}$$

$$\text{הינה } g(\omega) = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{1}{bi - (\omega - a)} - \frac{1}{bi - (\omega + a)} \right]$$

$$(4) \quad \text{מצאו התמרת פורייה של } g(x) = e^{-|x|} \cos(2x) \quad \text{על ידי שימוש בנוסחת מודולציה ובעובדה}$$

$$\text{כי } F\{e^{-|x|}\} = \frac{1}{\pi(1 + \omega^2)}$$

$$(5) \quad \text{מצאו התמרת פורייה של } g(x) = e^{-|x|} \sin^2(3x) \quad \text{על ידי שימוש בנוסחת מודולציה}$$

$$\text{ובעובדה כי } F\{e^{-|x|}\} = \frac{1}{\pi(1 + \omega^2)}$$

$$(6) \quad \text{נניח כי } f(x) \in G(R) \text{ ונגדיר } g(x) = f(3x - 2) \cdot \cos(x). \quad \text{בטאו את } g(\omega) \text{ על ידי } f(\omega).$$

$$(7) \quad \text{מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא } f(\omega) = e^{3i\omega} \cdot e^{-|\omega - 2|} \quad \text{רמז: } F\left\{\frac{1}{1 + x^2}\right\} = \frac{1}{2} e^{-|x|}$$

$$(8) \quad \text{תהי } H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

חשבו את התמרת הפורייה של הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } H(x)e^{-ax} \quad \text{כאשר } a > 0$$

$$\text{ב. } H(x)e^{-ax} \cos(bx) \quad \text{כאשר } a, b > 0$$

$$\text{ג. } H(x)e^{-ax} \sin(bx) \quad \text{כאשר } a, b > 0$$

## תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

$$f(x) = 2\pi i \cdot \chi_{[-1,1]}(x) \cdot \sin(x) \quad (2)$$

(3) הוכחה.

$$F\{e^{-|x|} \cos(2x)\} = \frac{1}{2\pi(1+[\omega+2]^2)} + \frac{1}{2\pi(1+[\omega-2]^2)} \quad (4)$$

$$g(\omega) = \frac{1}{2} \frac{1}{\pi(1+\omega^2)} - \left[ \frac{1}{2\pi(1+[\omega+6]^2)} + \frac{1}{2\pi(1+[\omega-6]^2)} \right] \quad (5)$$

$$g(\omega) = \frac{1}{6} \left[ e^{-\frac{i^2}{3}(\omega+1)} f\left(\frac{\omega+1}{3}\right) + e^{-\frac{i^2}{3}(\omega-1)} f\left(\frac{\omega-1}{3}\right) \right] \quad (6)$$

$$F\left\{e^{2i[x+3]} \frac{2}{1+[x+3]^2}\right\} \quad (7)$$

$$\frac{1}{2\pi(a+i\omega)} \quad \text{א.} \quad (8)$$

$$\frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{a+i[\omega-b]} + \frac{1}{a+i[\omega+b]} \right) \quad \text{ב.}$$

$$\frac{1}{4\pi i} \left( \frac{1}{a+i[\omega-b]} + \frac{1}{a+i[\omega+b]} \right) \quad \text{ג.}$$

## נוסחת המומנט:

### שאלות:

(1) מצאו התמרת פורייה של  $g(x) = \begin{cases} x & x \in (-1,1) \\ 0 & \text{else} \end{cases}$  על ידי שימוש

$$.F\{x \cdot f(x)\} = i \frac{d}{d\omega} f(\omega) \text{ בנוסחה}$$

(2) מצאו התמרת פורייה של  $g(x) = x^2 e^{-x^2}$  על ידי שימוש בנוסחת המומנט ובעובדה

$$.F\{e^{-x^2}\} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}} \text{ כי}$$

(3) מצאו התמרת פורייה של  $g(x) = x \cdot e^{-|x|}$  על ידי שימוש בנוסחת המומנט ובעובדה

$$.F\{e^{-|x|}\} = \frac{1}{\pi(1+\omega^2)} \text{ כי}$$

(4) מצאו את התמרת פורייה של  $f(x) = e^{-x^2}$ .

(5) מצאו התמרת פורייה של  $f(x) = 8x^3 e^{\frac{-4(x+1)^2+5}{3}}$ .

(6) תהי  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^5} & x \geq 1 \\ 0 & x < 1 \end{cases}$

הוכיחו כי  $f(\omega)$  גזירה ברציפות 3 פעמים.

(7) נתון כי התמרת פורייה של  $f \in L^1_{PC}(\mathbb{R})$  רציפה היא  $f(\omega) = \frac{1}{1+|\omega|}$ .

הוכיחו כי האינטגרל  $\int_{-\infty}^{\infty} |x \cdot f(x)| dx$  מתבדר.

## תשובות סופיות:

$$i \cdot \frac{\omega \cos \omega - \sin \omega}{\pi \omega^2} \quad (1)$$

$$F \left\{ x^2 e^{-x^2} \right\} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \left( 1 - \frac{\omega^2}{2} \right) e^{-\frac{\omega^2}{4}} \quad (2)$$

$$F \left\{ x \cdot e^{-|x|} \right\} = -\frac{i}{\pi} \frac{2\omega}{(1+\omega^2)^2} \quad (3)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}} \quad (4)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{256} \sqrt{\frac{3}{\pi}} (27i\omega^3 + 216\omega^2 - 792i\omega - 1088) e^{i\omega - \frac{3\omega^2}{16} - \frac{5}{3}} \quad (5)$$

(6) הוכחה.

(7) הוכחה.

## נוסחת ההתמרה ההפוכה:

שאלות:

(1) חשבו  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\omega x)}{\pi(1+\omega^2)} d\omega$  לכל  $x$  ממשי על ידי שימוש במשפט התמרה הפוכה.

(2) חשבו  $\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M \frac{\sin(\omega) \cos(\omega x)}{\pi \omega} d\omega$  לכל  $x$  ממשי על ידי שימוש במשפט התמרה הפוכה.

תשובות סופיות:

(1) ראו סרטון.

$$(2) \begin{cases} 0 & |x| > 1 \\ 1 & |x| < 1 \\ \frac{1}{2} & x = 1, x = -1 \end{cases}$$

## משפט פלנשראלי:

### שאלות:

(1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של  $f(x) = \chi_{[-a,a]}(x)$  עבור  $a > 0$ .

ב. חשבו את האינטגרל  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ax)}{x} \frac{\sin(bx)}{x} dx$  עבור  $a, b > 0$ .

(2) הוכיחו כי  $\int_0^{\infty} \frac{e^{-x} \sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{4}$ . תוכלו להיעזר בעובדה:  $F\left\{\frac{1}{1+x^2}\right\} = \frac{1}{2}e^{-|\omega|}$ .

(3) הוכיחו כי  $\int_0^{\infty} \frac{\sin(2x)}{x(1+4x^2)} dx = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{e}\right)$ .

(4) הוכיחו כי לא קיימת פונקציה  $f(x) \in L^1_{PC}(\mathbb{R}) \cap L^2_{PC}(\mathbb{R})$  כך ש-  $f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+|\omega|}}$ .

### תשובות סופיות:

(1) א.  $f(\omega) = \frac{\sin(\omega a)}{\pi \omega}$  ב.  $\pi \cdot \min\{a, b\}$

(2) הוכחה.

(3) הוכחה.

(4) הוכחה.

## משפט הקונבולוציה:

### שאלות:

(1) חשבו את הקונבולוציה  $(\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]})_{(x)}$ .

תזכורת:  $\chi_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-1,1] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

רמז: חלקו למקרים.

(2) חשבו את הקונבולוציה  $(f * f)_{(x)}$  כאשר  $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$

רמז: חלקו למקרים  $x > 0$  ו-  $x \leq 0$ .

(3) מצאו פונקציה  $f \in G$  כך ש-  $f(\omega) = \left(\frac{\sin \omega}{\omega}\right)^2$

(4) נסמן ב-  $E$  את מרחב הפונקציות הממשיות הגזירות פעמיים  $f(t)$

המקיימות  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$  וגם  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty$ .

מצאו פונקציה  $g(x)$  כך שלכל  $f(t) \in E$  מתקיים השוויון.

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f(t) - f''(t)) g(x-t) dt = 2f(x)$$

(5) נגדיר  $f(x) = \frac{1}{x^2+4}$ ,  $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$ . מצאו את הקונבולוציה  $(f * g)_{(x)}$ .

תזכורת:  $F\left\{\frac{1}{x^2+a^2}\right\} = \frac{1}{2a} e^{-a|\omega|}$

(6) ענה על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של  $(1+|x|)e^{-|x|}$ .

ב. פתרו את המשוואה האינטגרלית  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-t|} f(t) dt = e^{-|x|} + |x|e^{-|x|}$ .

(7) ענו על הסעיפים הבאים :

א. חשבו את הקונבולוציה  $(f * f)_{(x)}$  כאשר  $f(x) = \chi_{[0,1]}(x)$ .

ב. הוכיחו כי  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1 - \cos x)^2}{x^4} dx = \frac{\pi}{3}$ .

(8) חשבו את הקונבולוציה  $(f * f)_{(x)}$  כאשר  $f(x) = \chi_{[1,2]}(x)$ .

(9) חשבו את הקונבולוציה  $(f * f)_{(x)}$  כאשר  $f(x) = \chi_{[0,2]}(x)$ .

(10) חשבו את הקונבולוציה  $(\chi_{[0,1]}(x) * \chi_{[1,2]}(x))_{(x)}$ .

(11) חשבו את הקונבולוציה  $(e^{-x^2} * e^{-x^2})_{(x)}$ .

א. לפי ההגדרה.

ב. על ידי שימוש במשפט הקונבולוציה.

הערה: תוכלו להיעזר בעובדה  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ .

(12) מצאו פתרון למשוואה האינטגרלית  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(x-t)dt = e^{\frac{-3(x+1)^2}{2}}$ .

(13) נניח כי  $f(x) \in L^1_{PC}(\mathbb{R})$  רציפה ומקיימת את המשוואה האינטגרלית

$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-y^2}e^{2xy}dy \equiv 0$  הוכיחו כי  $f(x) \equiv 0$ .

## תשובות סופיות:

$$\left(\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]}\right)_{(x)} = \begin{cases} 2+x & x \in [-2, 0] \\ 2-x & x \in [0, 2] \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (1)$$

$$(f * f)_{(x)} = \begin{cases} xe^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}(2+x) & x \in [-2, 0] \\ \frac{\pi}{2}(2-x) & x \in [0, 2] \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (3)$$

$$g(x) = e^{-|x|} \quad (4)$$

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{x^2 + 9} \quad (5)$$

$$f(x) = e^{-|x|} \quad \text{ב. הוכחה.}$$

$$\frac{2}{\pi(1+\omega^2)^2} \quad \text{א.} \quad (6)$$

ב. הוכחה.

$$(f * f)_{(x)} = \begin{cases} 0 & x > 2 \\ 2-x & 1 < x < 2 \\ x & 0 < x < 1 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad \text{א.} \quad (7)$$

$$(f * f)_{(x)} = \begin{cases} 0 & x > 4 \\ 4-x & 3 < x < 4 \\ x-2 & 2 < x < 3 \\ 0 & x < 2 \end{cases} \quad (8)$$

$$(f * f)_{(x)} = \begin{cases} 0 & x > 4 \\ 4 - x & 2 < x < 4 \\ x & 0 < x < 2 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (9)$$

$$\left( \chi_{[0,1]}(x) * \chi_{[1,2]}(x) \right)_{(x)} = \begin{cases} 0 & x > 3 \\ 3 - x & 2 < x < 3 \\ x - 1 & 1 < x < 2 \\ 0 & x < 1 \end{cases} \quad (10)$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{ב.}$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{א.} \quad (11)$$

$$f(x) = \sqrt[4]{\frac{6}{\pi}} e^{-3\left(x+\frac{1}{2}\right)^2} \quad (12)$$

(13) הוכחה.

## תרגילים מסכמים:

### שאלות:

(1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & |x| \leq \pi \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

ב. חשבו התמרת פורייה של הפונקציה

$$g(x) = \begin{cases} \cos(x) & |x| \leq \pi \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

ג. חשבו את האינטגרל

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(\pi x) \sin(x)}{(1-x^2)} dx$$

ד. חשבו את האינטגרל

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(1-x^2)^2} \sin^2(\pi x) dx$$

(2) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של  $f(x) = x \cdot e^{-|x|}$

ב. מצאו את כל הפונקציות  $h(y)$  המקיימות

$$\int_{-\infty}^{\infty} h'(y) e^{-|x-y|} dy = x \cdot e^{-|x|}$$

(3) יהי  $A > 0$  קבוע. נגדיר

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq A \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

ידוע כי ישנה פונקציה  $g(x) \in G$  המקיימת  $g(\omega) = f(\omega) f(-\omega)$ . מצאו במפורש את  $g(x)$ .

(4) נניח כי  $f(x) \in C^2(-\infty, \infty)$  כך ש- $f'(x), x \cdot f'(x), f''(x) \in L^1_{PC}(-\infty, \infty)$  ומתקיים  $f''(x) + x \cdot f'(x) + f(x) = 0$  לכל  $x$  ממשי.

א. הוכיחו כי  $f(x) \in L^1_{PC}(-\infty, \infty)$

ב. חשבו את  $f(\omega)$  אם נתון כי  $f(0) = 1$

ג. מצאו את  $f(x)$

$$(5) \quad f(x) = \begin{cases} 2 & |x| \leq 1 \\ 4 & 1 \leq |x| \leq 2 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{תהי}$$

א. חשבו את  $f(\omega)$ .

ב. חשבו את האינטגרל  $\int_0^\infty \frac{[2\sin(2t) - \sin(t)]^2}{t^2} dt$ .

ג. חשבו את האינטגרל  $\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M \frac{2\sin(2t) - \sin(t)}{\pi t} \cos(t) dt$ .

(6) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של הפונקציה  $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x^2}{\pi^2} & |x| \leq \pi \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

ב. חשבו את האינטגרלים:  $\int_0^\infty \left( \frac{\sin(\pi x) - \pi x \cos(\pi x)}{\pi^3 x^3} \right)^2 dx$

ו-  $\int_0^\infty \frac{\sin(\pi x) - \pi x \cos(\pi x)}{\pi^3 x^3} \cos(x) dx$

(7) נגדיר  $\phi(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ . הוכיחו כי המערכת  $\{\phi(x-n)\}_{n=-\infty}^{n=\infty}$  מהווה מערכת

אורתונורמלית ב-  $L^2_{PC}(-\infty, \infty)$ .

(8) תהי  $f \in G$  פונקציה כך ש-  $f' \in G$  פונקציה רציפה. מצאו פונקציה  $g \in G$

המקיימת את המשוואה  $g(t) = \int_{-\infty}^t e^{u-t} g(u) du + f'(t)$ .

(9) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא  $f(\omega) = \frac{1}{(1+\omega^2)^2}$ .

(10) פתרו את המשוואה האינטגרלית  $\int_{-\infty}^\infty \frac{f(t)}{(x-t)^2 + b^2} dt = \frac{x}{(x^2 + a^2)^2}$

$$(11) \text{ נגדיר } f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}(\omega - t) \chi_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}(t) e^{i\omega x} dt d\omega$$

מצאו ביטוי מפורש (ללא אינטגרלים) עבור  $f(x)$ .

$$\text{תזכורת: } \chi_{[a,b]}(t) = \begin{cases} 1 & t \in [a,b] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$(12) \text{ השתמשו במשפט פלנשראל על מנת לחשב את האינטגרל } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(a^2 + x^2)(x^2 + b^2)} dx$$

כאשר  $a, b > 0$ .

$$(13) \text{ מצאו את התמרת הפורייה של } f(x) = e^{-(x^2 + 2x + 5)}$$

$$(14) \text{ הוכיחו כי } \int_0^{\infty} e^{-ax^2} \cos(bx) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}} \text{ לכל } a, b > 0 \text{ קבועים.}$$

$$(15) \text{ הוכיחו כי } \int_0^{\infty} \frac{\sin^2(x) \cos(x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{8e} \left(1 - \frac{1}{e^2}\right)$$

$$(16) \text{ הוכיחו כי } \int_0^{\infty} \sin^3(x) x e^{-x} dx = \frac{9}{25}$$

## תשובות סופיות:

$$f(\omega) = -i \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \sin(\omega\pi) \cdot \frac{2}{1-\omega^2} \quad \text{א.} \quad (1)$$

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2\omega \sin(\omega\pi)}{1-\omega^2} \quad \text{ב.} \quad \frac{\pi^2}{2} \quad \text{ד.} \quad \frac{\pi}{2} \sin(1) \quad \text{ג.}$$

$$-h(y) = e^{-|y|}, \quad h(y) = -e^{-|y|} \quad \text{ב.} \quad -\frac{2i\omega}{\pi(1+\omega^2)^2} \quad \text{א.} \quad (2)$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \left( \frac{(A+x)^3}{3} - \frac{(A+x)^2}{2} x \right) & -A < x < 0 \\ \frac{1}{2\pi} \left( \frac{A^3}{3} - \frac{A^2}{2} x + \frac{x^3}{6} \right) & 0 < x < A \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (3)$$

$$\sqrt{2\pi} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{ג.} \quad e^{-\frac{\omega^2}{2}} \quad \text{ב.} \quad \text{א. הוכחה.} \quad (4)$$

$$\frac{3\pi}{2} \quad \text{ג.} \quad \frac{5\pi}{2} \quad \text{ב.} \quad \frac{4 \cdot \sin(2\omega) - 2 \cdot \sin(\omega)}{\pi\omega} \quad \text{א.} \quad (5)$$

$$\frac{1}{4} \left( 1 - \frac{1}{\pi^2} \right) \quad \text{ג.} \quad \frac{1}{15} \quad \text{ב.} \quad 2 \frac{\sin(\pi\omega) - \pi\omega \cos(\pi\omega)}{\pi^3 \omega^3} \quad \text{א.} \quad (6)$$

$$\text{הוכחה.} \quad (7)$$

$$g(t) = f(t) + f'(t) \quad (8)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} e^x (1-x) & x < 0 \\ \frac{\pi}{2} e^{-x} (1+x) & x > 0 \end{cases} \quad (9)$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{b}{a} \frac{(a-b)x}{(x^2 + (a-b)^2)^2} \quad (10)$$

$$f(x) = 4 \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{x^2} \quad (11)$$

$$\frac{\pi}{a+b} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega}{a^2 + \omega^2} \frac{\omega}{b^2 + \omega^2} d\omega \quad (12)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{e^4} \cdot e^{i\omega} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}} \quad (13)$$

$$\text{הוכחה.} \quad (14)$$

15) הוכחה.

16) הוכחה.

# שיטות מתמטיות

פרק 12 - מד"ר - משוואות ליניאריות מסדר שני

תוכן העניינים

|           |                                                       |
|-----------|-------------------------------------------------------|
| 125       | 1. משוואה חסרה - שיטת הורדת סדר המשוואה               |
| 127       | 2. משוואה לינארית, הומוגנית, עם מקדמים קבועים         |
| 129       | 3. השוואת מקדמים בשיטת "הניחוש המושכל"                |
| 131       | 4. השוואת מקדמים בשיטת "המרשם"                        |
| 133       | 5. וריאציית פרמטרים                                   |
| (ללא ספר) | 6. משוואה לינארית, עם מקדמים לא קבועים - משוואת אוילר |
| 134       | 7. משוואה לינארית כללית, שיטת הפתרון השני, שיטת אבל   |
| 135       | 8. הוורונסקיאן ושימושו                                |
| 137       | 9. משפט הקיום והיחידות למדר לינארית מסדר שני          |
| 138       | 10. השיטה האופרטורית                                  |

## משוואה חסרה – שיטת הורדת סדר המשוואה

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$(x \neq 0) \quad x^2 y'' + xy' = \frac{1}{x} \quad (1)$$

$$(\cos x \neq 0) \quad y'' \tan x - 1 = y' \quad (2)$$

$$2xy' y'' - (y')^2 + 1 = 0 \quad (3)$$

$$y'' x \ln x = y' \quad (4)$$

$$xy'' = x^2 e^x + y' \quad (5)$$

$$yy'' + (y')^2 = 0 \quad (6)$$

$$2y'' y - (y')^2 = 1 \quad (7)$$

$$(\cos y \neq 0) \quad y'' \tan y = 2(y')^2 \quad (8)$$

### תשובות סופיות

$$y = \frac{1}{x} + C_1 \cdot \ln x + C_2 \quad (1)$$

$$y = -x + C_1 \cdot \cos x + C_2 \quad (2)$$

$$y = \pm \frac{2}{3C_1} (C_1 x + 1)^{3/2} + C_2; y = \pm x + C_3 \quad (3)$$

$$y = C_1 (x \ln x - x) + C_2; y = C_3 \quad (4)$$

$$y = e^x (x - 1) + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 \quad (5)$$

$$\frac{y^2}{2} = cx + k; y = c \quad (6)$$

$$y = \frac{1}{c} \left[ \frac{c^2 (x + k)^4}{4} + 1 \right] \quad (7)$$

$$\cot y = -(cx + k); y = c \quad (8)$$

## משוואה לינארית הומוגנית, עם מקדמים קבועים

### שאלות

פתרו את המשוואות בשאלות 1-11 :

$$y'' - 100y = 0 \quad (1)$$

$$y'' - 4y' = 0 \quad (2)$$

$$y'' - 8y' + 7y = 0 \quad (3)$$

$$z(0) = 1, \quad z'(0) = 1, \quad 4z'' + z' - 5z = 0 \quad (4)$$

$$y'' - 2y' + y = 0 \quad (5)$$

$$4 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + 4 \frac{\partial x}{\partial t} + x(t) = 0 \quad (6)$$

$$y'' + 4y = 0 \quad (7)$$

$$y'' + 10y' + 125y = 0 \quad (8)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 3; \quad y'' - 2y' + 10y = 0 \quad (9)$$

$$5y'' + 8y' + 4y = 0 \quad (10)$$

$$\begin{cases} y''(x) - \frac{1}{a^2} y(x) = 0 & (a > 0) \\ y(0) = 4 \\ y(\infty) = y(-\infty) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

$$(12) \quad y y'' + (y')^2 = 0 \quad \text{נתונה המד"ר}$$

א. הראו כי  $y_1 = 4$  ו-  $y_2 = \sqrt{x}$  הם פתרונות של המד"ר.

ב. הראו כי הפתרון  $z(x) = y_1(x) + y_2(x)$ , אינו פתרון של המד"ר.

האם יש בכך סתירה לעקרון הסופרפוזיציה?

### תשובות סופיות

$$(1) \quad y = c_1 e^{10x} + c_2 e^{-10x}$$

$$(2) \quad y = c_1 + c_2 e^{4x}$$

$$(3) \quad y = c_1 e^x + c_2 e^{7x}$$

$$(4) \quad z = e^x$$

$$(5) \quad y = c_1 e^x + c_2 x e^x$$

$$(6) \quad x(t) = c_1 e^{\frac{-t}{2}} + c_2 t e^{\frac{-t}{2}}$$

$$(7) \quad y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$$

$$(8) \quad y = e^{-5x} [c_1 \cos 10x + c_2 \sin 10x]$$

$$(9) \quad y = e^2 \sin 3x$$

$$(10) \quad y = e^{\frac{-4x}{5}} \left[ c_1 \cos \left( \frac{2}{5} x \right) + c_2 \sin \left( \frac{2}{5} x \right) \right]$$

$$(11) \quad y = 4e^{-\frac{|x|}{a}}$$

(12) שאלת הוכחה.

## השוואות מקדמים בשיטת "הניחוש המושכל"

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$y'' + 5y' + 6y = 22x + 6x^2 \quad (1)$$

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 7; \quad y'' - 2y' + y = e^{2x} \quad (2)$$

$$y'' - y' - 2y = 4\sin 2x \quad (3)$$

$$y'' - 2y = xe^{-x} \quad (4)$$

$$y'' - y = 3e^{2x} \cos x \quad (5)$$

$$z'' + z = \sin x \quad (6)$$

$$y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + e^x + 2xe^x + 4e^{3x} \quad (7)$$

$$y'' + 3y' = 9x \quad (8)$$

$$y'' - 3y' + 2y = e^x \quad (9)$$

$$y'' - 2y' = 6x^2 - 2x \quad (10)$$

$$x'' + 5x' + 6x = e^{-t} + e^{-2t} \quad (11)$$

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \sin 2x \quad (12)$$

## תשובות סופיות

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} + x^2 + 2x - 2 \quad (1)$$

$$y = e^x + 4xe^x + e^{2x} \quad (2)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{5} \sin 2x - \frac{3}{5} \cos 2x \quad (3)$$

$$y = c_1 e^{-\sqrt{2}x} + c_2 e^{\sqrt{2}x} + (2-x)e^{-x} \quad (4)$$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + \frac{3}{10} e^{2x} \cos x + \frac{3}{5} e^{2x} \sin x \quad (5)$$

$$z = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x \quad (6)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + x^2 + 3x + 3.5 - x^2 e^x - 3xe^x + 2e^{3x} \quad (7)$$

$$y = c_1 + c_2 e^{-3x} + \frac{3}{2} x^2 - x \quad (8)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - xe^x \quad (9)$$

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} - x^2 - x - x^3 \quad (10)$$

$$x = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} + \frac{1}{2} \cdot e^{-t} + te^{-2t} \quad (11)$$

$$y = e^{-x} \sin 2x \quad (12)$$

## השוואת מקדמים בשיטת "המרשם"

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$y'' + 5y' + 6y = 22x + 6x^2 \quad (1)$$

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 7; \quad y'' - 2y' + y = e^{2x} \quad (2)$$

$$y'' - y' - 2y = 4 \sin 2x \quad (3)$$

$$y'' - 2y = xe^{-x} \quad (4)$$

$$y'' - y = 3e^{2x} \cos x \quad (5)$$

$$z'' + z = \sin x \quad (6)$$

$$y'' + 3y' = 9x \quad (7)$$

$$y'' - 3y' + 2y = e^x \quad (8)$$

$$y'' - 2y' = 6x^2 - 2x \quad (9)$$

$$x'' + 5x' + 6x = e^{-t} + e^{-2t} \quad (10)$$

$$y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + e^x + 2xe^x + 4e^{3x} \quad (11)$$

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \sin 2x \quad (12)$$

## תשובות סופיות

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} + x^2 + 2x - 2 \quad (1)$$

$$y = e^x + 4xe^x + e^{2x} \quad (2)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{5} \sin 2x - \frac{3}{5} \cos 2x \quad (3)$$

$$y = c_1 e^{-\sqrt{2}x} + c_2 e^{\sqrt{2}x} + (2-x)e^{-x} \quad (4)$$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + \frac{3}{10} e^{2x} \cos x + \frac{3}{5} e^{2x} \sin x \quad (5)$$

$$z = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x \quad (6)$$

$$y = c_1 + c_2 e^{-3x} + \frac{3}{2} x^2 - x \quad (7)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - x e^x \quad (8)$$

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} - x^2 - x - x^3 \quad (9)$$

$$x = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} + \frac{1}{2} \cdot e^{-t} + t e^{-2t} \quad (10)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + x^2 + 3x + 3.5 - x^2 e^x - 3x e^x + 2e^{3x} \quad (11)$$

$$y = e^{-x} \sin 2x \quad (12)$$

## וריאציית פרמטרים

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x} \quad (1)$$

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x \quad (2)$$

$$y'' + 2y' + y = 3e^{-x} \sqrt{x+1} \quad (3)$$

$$y(1) = 0, y'(1) = 0 ; y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x} \quad (4)$$

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^{-x}} \quad (5)$$

$$y'' + 4y = \sec 2x \quad (6)$$

### תשובות סופיות

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \cos x \cdot x + \sin x \cdot \ln |\sin x| \quad (1)$$

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} - e^{-2x} \frac{x^2}{2} \left[ \ln x - \frac{1}{2} \right] + x^2 e^{-2x} [\ln x - 1] \quad (2)$$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} - e^{-x} \left[ \frac{6(\sqrt{x+1})^5}{5} - \frac{6(\sqrt{x+1})^3}{3} \right] + x e^{-x} \left[ 2(x+1)^{3/2} \right] \quad (3)$$

$$y = e^x - x e^x + x e^x \ln x \quad (x > 0) \quad (4)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + e^x \ln(1+e^{-x}) + e^{2x} [\ln(1+e^{-x}) - (1+e^{-x})] \quad (5)$$

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x \ln |\cos 2x| + \sin 2x \cdot x \quad (6)$$

## משוואה ליניארית כללית, שיטת הפתרון השני, שיטת אבל

### שאלות

(1) פתרו  $y'' + \tan x \cdot y' - (2 \tan x + 4)y = 0$ , כאשר ידוע  $y_1(x) = e^{2x}$ .

(2) פתרו  $(1-x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0$ .

(3) הסבירו את שיטת "הפתרון השני" לפתרון מד"ר ליניארית, כללית, לא הומוגנית, מסדר שני. הדגימו על המד"ר:

$$(1-x)y'' + x \cdot y' - y = 2(1-x)^2 e^{-x}, \quad (0 < x < 1),$$

כאשר ידוע ש-  $y_1(x) = e^x$ , פתרון של המד"ר ההומוגנית המתאימה.

### תשובות סופיות

(1)  $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} (\sin x - 4 \cos x)$

(2)  $y = c_1 x + c_2 (x^2 + 1)$

(3) שאלת הדגמה.

## הוורונסקיאן ושימושו

### שאלות

- (1) האם ייתכן כי  $y_1(x) = e^x$ ,  $y_2(x) = \sin x$  הם שני פתרונות של המשוואה  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$  עם מקדמים רציפים בקטע  $[0, \pi]$ ?
- (2) הראו כי הפונקציות  $y_1(x) = \sin x^2$ ,  $y_2(x) = \cos x^2$  הן פתרונות בת"ל של המשוואה  $xy'' - y' + 4x^3y = 0$  בקטע  $(-4, \infty)$ .  
חשבו את הוורונסקיאן של הפונקציות והראו כי הוא מתאפס רק עבור  $x = 0$ .  
דני טוען שיש בכך סתירה לטענה ידועה. מהי הטענה? והאם דני צודק?
- (3) בדיקה ישירה מראה שהפונקציות  $y_1(x) = xe^x$ ,  $y_2(x) = e^{-x}$  הן פתרונות של המשוואה  $y'' - \frac{2}{1+2x}y' - \frac{2x+3}{1+2x}y = 0$  בקטע  $(-\frac{1}{2}, \infty)$ .  
האם הפונקציות הללו בת"ל בקטע?
- (4) נתונות שתי פונקציות  $y_1 = x^3$ ,  $y_2 = |x^3|$  בקטע  $[-4, 4]$ .  
א. חשבו את הוורונסקיאן של הפונקציות בקטע.  
ב. בדקו האם הפונקציות תלויות לינארית בקטע.  
ג. האם ייתכן כי הפונקציות הן פתרונות של אותה מד"ר הומוגנית מסדר שני בעלת מקדמים רציפים?  
ד. הפונקציות הנתונות הן פתרונות של המד"ר  $xy'' - 2y' = 0$ .  
האם יש בכך סתירה לתוצאה בסעיף ג'?
- (5) ענו על הסעיפים הבאים:  
א. יהיו  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  פונקציות גזירות פעמיים בקטע  $I$ , ונניח כי הוורונסקיאן שלהן שונה מאפס ב- $I$ .  
הוכיחו כי קיימת משוואה הומוגנית מסדר 2, בעלת מקדמים רציפים בקטע, ש- $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  הם פתרונות שלה.  
ב. רשמו משוואה הומוגנית מסדר שני עם מקדמים רציפים בקטע  $x > 0$ , שהפונקציות  $y_1(x) = x^2$ ,  $y_2(x) = x^4$  הן פתרונות שלה.

- (6) נתון כי  $y_1(x), y_2(x)$  הם פתרונות של המד"ר  $y''(x) + p(x)y' + q(x)y = 0$ ,  
 בקטע  $I$ , כאשר  $p, q$  רציפות בקטע  $I$ .  
 הראו כי אם קיימת נקודה  $c$  בקטע  $I$ , שעבורה  $y_1(c) = y_2(c) = 0$ ,  
 אז  $\{y_1(x), y_2(x)\}$  אינה מערכת בסיסית של פתרונות המד"ר הנתונה.

### תשובות סופיות

- (1) לא.  
 (2)  $W = -2x$   
 (3) כן.  
 (4) א.  $W = 0$  ב. שאלת בדיקה. ג. לא. ד. לא.  
 (5) א. שאלת הוכחה. ב.  $y'' - \frac{5}{x}y' + \frac{8}{x^2}y = 0$   
 (6) שאלת הוכחה.

## משפט הקיום והיחידות למדר לינארית מסדר שני

### שאלות

(1) נתונה המשוואה  $y'' - 4y = 12x$ .

א. פתרו את המשוואה.

ב. מצאו פתרון המקיים:

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 11 \end{cases}$$

ג. נסו למצוא פתרון המקיים:

$$\begin{cases} y(0) = 4 \\ y'(0) = 2 \\ y''(0) = 1 \end{cases}$$

האם כישלונך מפריך את משפט הקיום?

ד. תנו דוגמה מפורשת לשני פתרונות שונים, המקיימים  $y(0) = 1$ .

האם הדוגמה מפריכה את משפט היחידות?

(2) נתונה הבעיה:

$$\begin{cases} x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

הראו כי  $y_1(x) = 0$  ו-  $y_2(x) = x^2$ , הם פתרונות של הבעיה.

האם אין בכך סתירה למשפט הקיום והיחידות?

(3) האם קיימת משוואה דיפרנציאלית לינארית מסדר שני, עם מקדמים רציפים בסביבת הנקודה  $x = 0$ , כך שהפונקציות  $y = 4x$  ו-  $y = \sin 4x$  הן פתרונותיה?

### תשובות סופיות

(1) א.  $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - 3x$  ב.  $y = 4e^{2x} - 3e^{-2x} - 3x$

ג. המשוואות הראשונה והשלישית סותרות זו את זו. לא.

ד. לפתרון המלא עם הסברים מפורטים היכנסו לאתר.

(2) לפתרון המלא עם הסברים מפורטים היכנסו לאתר.

(3) לפתרון המלא עם הסברים מפורטים היכנסו לאתר.

## השיטה האופרטורית

הערה: נושא זה לא נלמד בדרך כלל; בדקו עם המרצה אם הוא נדרש או לא.

בשאלות אלו הסימון הוא:  $ay'' + by' + cy = Q(x) \Leftrightarrow (aD^2 + bD + c)y = Q(x)$ .

### שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

$$(D^2 - D - 2)y = 4e^{-2x} + 10e^x + 11 \quad (1)$$

$$(D^2 - 2D + 1)y = 10e^{4x} + e^x - 1 \quad (2)$$

$$(D^2 + D - 2)y = 4e^x + e^{10x} + 14 \quad (3)$$

$$(D^2 + 4)y = \sin 5x \quad (4)$$

$$(D^2 - 4)y = \sin x \cos x \cos 2x \quad (5)$$

$$(D^2 + D - 2)y = \cos x - 3\sin x \quad (6)$$

$$(D^2 + 2D - 3)y = 2 \cos x \cos 2x \quad (7)$$

## תשובות סופיות

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + e^{-2x} - 5e^x - 5.5 \quad (1)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + \frac{10}{9} e^{4x} + x^2 e^x - 1 \quad (2)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - 4x e^x + \frac{1}{72} e^{10x} + 7 \quad (3)$$

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \frac{1}{21} \sin 5x \quad (4)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{80} \sin 4x \quad (5)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + \sin x \quad (6)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-3x} + \frac{1}{10} \sin x - \frac{1}{5} \cos x + \frac{1}{30} \sin 3x - \frac{1}{15} \cos 3x \quad (7)$$

# שיטות מתמטיות

פרק 13 - מד"ר - משוואות מסדר ראשון

תוכן העניינים

|                                                |           |
|------------------------------------------------|-----------|
| 1. מבוא                                        | (ללא ספר) |
| 2. הפרדת משתנים                                | 140       |
| 3. משוואה הומוגנית                             | 142       |
| 4. משוואה מהצורה $(ax+by+c)dx+(dx+ey+f)dy=0$   | 144       |
| 5. משוואה מדויקת                               | 145       |
| 6. גורם אינטגרציה                              | 147       |
| 7. משוואה לינארית מסדר ראשון                   | 150       |
| 8. משוואת ברנולי                               | 152       |
| 9. משוואת ריקטי                                | 153       |
| 10. הצבות שונות ומשוונות                       | 154       |
| 11. משפט הקיום והיחידות על שם פיאנו ופיקארד    | 155       |
| 12. פתרונות גרפיים ונומריים למשוואה מסדר ראשון | 158       |
| 13. משוואות מסדר ראשון וממעלה גבוהה            | 160       |

## הפרדת משתנים

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$(y \neq 0) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y} \quad (1)$$

$$(1-x)y' = y^2 \quad (2)$$

$$yy'\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{1+y^2} = 0 \quad (3)$$

$$y(2)=1 ; (x-1)\frac{dy}{dx} = 4y \quad (4)$$

$$y(1) = -1 ; \frac{dy}{dx} = xy + 3y - 3x - 9 \quad (5)$$

$$(x^2y - 2 + 2x^2 - y)dx - (xy^2 - 4 - 4x + y^2)dy = 0 \quad (6)$$

$$dy = 2t(y^2 + 4)dt \quad (7)$$

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - 2x + 2 \quad (8)$$

$$y(\pi) = 1 ; y' + y^2 \sin x = 0 \quad (9)$$

$$(\cos x \neq 0) \quad y(0) = 5 ; \frac{dy}{dx} = y \sec^2 x \quad (10)$$

$$y(0) = 1 ; \frac{dy}{dx} = \frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}} \quad (11)$$

## תשובות סופיות

$$y = \pm \sqrt{\frac{2}{3}x^3 + k} \quad (1)$$

$$y = \frac{1}{\ln|1-x| - c}, \quad y = 0 \quad (2)$$

$$\sqrt{1+y^2} = -\sqrt{1+x^2} + c \quad (3)$$

$$\frac{1}{4} \ln|y| = \ln|x-1| \quad (4)$$

$$\ln|y-3| = \frac{x^2}{2} + 3x + \ln 4 - 3.5 \quad (5)$$

$$y = 2 \pm \sqrt{(x-1)^2 + k} \quad (6)$$

$$y = 2 \tan(2t^2 + k) \quad (7)$$

$$x = 1 + \tan(t + c) \quad (8)$$

$$y = -\frac{1}{\cos x} \quad (9)$$

$$\ln|y| = \tan x + \ln 5 \quad (10)$$

$$\frac{1}{-2y^2} = \sqrt{1+x^2} - 1.5 \quad (11)$$

## משוואה הומוגנית

### שאלות

פתרו את המשוואות בשאלות 1-8 :

$$(y^3 + x^3)dx + xy^2dy = 0 \quad (1)$$

$$y' = \frac{4y - 3x}{2x - y} \quad (2)$$

$$y^2 + x^2y' = xy y' \quad (3)$$

$$(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0 \quad (4)$$

$$\left(x - y \cos \frac{y}{x}\right)dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0 \quad (5)$$

$$y' = \frac{2xye^{(x/y)^2}}{y^2 + y^2e^{(x/y)^2} + 2x^2e^{(x/y)^2}} \quad (6)$$

$$y(1) = 0 ; \left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)dx - xdy = 0 \quad (7)$$

$$(2x^2t - 2x^3)dt + (4x^3 - 6x^2t + 2xt^2)dx = 0 \quad (8)$$

$$(y^2 + x^2)dx + xy^n dy = 0 \quad (9) \quad \text{נתונה המשוואה}$$

א. מה צריך להיות הערך של הקבוע  $n$ , על מנת שהמשוואה תהיה הומוגנית?

ב. פתרו את המשוואה עבור הערך של  $n$  שנמצא בסעיף א.

## תשובות סופיות

$$-\ln|x| = \frac{1}{6} \ln|2(y/x)^3 + 1| + c, \quad y = -\frac{x}{2^{1/3}} \quad (1)$$

$$\ln|x| = \frac{1}{4} \ln|(y/x) - 1| - \frac{5}{4} \ln|(y/x) + 3| + c, \quad y = x, \quad y = -3x \quad (2)$$

$$-\ln|x| = \ln|(y/x)| - (y/x) + c, \quad y = 0 \quad (3)$$

$$-\ln|x| = \frac{1}{4} \ln|2(y/x)^2 + 4| + c, \quad y = 0, \quad y = -2x \quad (4)$$

$$\ln|x| = -\sin(y/x) + c \quad (5)$$

$$\ln(1 + e^{(x/y)^2}) = \ln|y| + c, \quad y = 0 \quad (6)$$

$$\ln x = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + c \quad (7)$$

$$\ln|t| = -\frac{1}{2} \ln|(x/t) - (x/t)^2| + c, \quad x(t) = 0, \quad x(t) = t \quad (8)$$

$$n = 1, \quad \ln|x| = -\frac{1}{4} \ln(1 + 2(y/x)^2) + c \quad (9)$$

## משוואה מהצורה $(ax + by + c)dx + (dx + ey + f)dy = 0$

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+1}{x+y+2} \quad (1)$$

$$(x+2y+3)dx + (2x+4y-1)dy = 0 \quad (2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y-x+5}{2x-y-4} \quad (3)$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{3+x+2y}{1+x+y} \quad (4)$$

$$(2x+y-3)dx + (x+y-1)dy = 0 \quad (5)$$

### תשובות סופיות

$$x = \frac{1}{2}(x+y+1) + \frac{1}{4}\ln(2(x+y+1)+1) + \frac{1}{4} + c, \quad y = -x - 1.5 \quad (1)$$

$$\ln|x-1| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y+2}{x-1} - 1\right| - \frac{3}{2}\ln\left|\frac{y+2}{x-1} + 1\right| + c, \quad y = x - 3, \quad y = -x - 1 \quad (2)$$

$$0 = 14y - (x+2y+3)^2 + k \quad (3)$$

$$\ln|x-1| = \frac{1}{4}\left[-(2+\sqrt{2})\ln\left|\sqrt{2}-2\frac{y+2}{x-1}\right| + (-2+\sqrt{2})\ln\left|\sqrt{2}+2\frac{y+2}{x-1}\right|\right] + c \quad (4)$$

$$y = \sqrt{0.5}x - 2 - \sqrt{0.5}, \quad y = -\sqrt{0.5}x - 2 + \sqrt{0.5}$$

$$\ln|x-2| = \frac{1}{2}\ln\left(2+2\frac{y+1}{x-2} + \left(\frac{y+1}{x-2}\right)^2\right) + c \quad (5)$$

## משוואה מדויקת

### שאלות

פתרו את המשוואות בשאלות 1-6:

$$(2x^3 + 3y)dx + (3x + y - 1)dy = 0 \quad (1)$$

$$(y^2 e^{xy^2} + 4x^3)dx + (2xye^{xy^2} - 3y^2)dy = 0 \quad (2)$$

$$(y \cos x + 2xe^y)dx + (\sin x + x^2 e^y - 1)dy = 0 \quad (3)$$

$$(1 + y^2 \sin 2x)dx - 2y \cos^2 x dy = 0 \quad (4)$$

$$\left(y^2 - \frac{y}{x(x+y)} + 2\right)dx + \left(\frac{1}{x+y} + 2y(x+1)\right)dy = 0 \quad (5)$$

$$(2x^2 t - 2x^3)dt + (4x^3 - 6x^2 t + 2xt^2)dx = 0 \quad (6)$$

$$(7) \quad \text{נתונה המשוואה } (3x^2 + ye^{xy})dx + (2y^3 + kxe^{xy})dy = 0, \text{ כאשר } k \text{ קבוע.}$$

א. מה צריך להיות הערך של הקבוע  $k$ , על מנת שהמשוואה תהיה מדויקת?

ב. פתור את המשוואה עבור הערך של  $k$  שנמצא בסעיף א.

## תשובות סופיות

$$0.5x^4 + 3yx + 0.5y^2 - y = c \quad (1)$$

$$e^{xy^2} + x^4 - y^3 = c \quad (2)$$

$$y \sin x + x^2 e^y - y = c \quad (3)$$

$$x - \frac{y^2 \cos 2x}{2} - \frac{y^2}{2} = c \quad (4)$$

$$\ln|x+y| + (x+1)y^2 + 2x - \ln|x| = c \quad (5)$$

$$x^2 t^2 - 2x^3 t + x^4 = c \quad (6)$$

$$k=1, \quad x^3 + e^{xy} + \frac{y^4}{2} = c \quad (7)$$

## גורם אינטגרציה

### שאלות

(1) הראו שהמשוואה  $x^2y^3 + x(1+y^2)y' = 0$  אינה מדויקת,

ופתרו אותה בעזרת גורם האינטגרציה  $\frac{1}{xy^3}$ .

(2) הראו שהמשוואה  $\left(\frac{\sin y}{y} - 2e^{-x} \sin x\right)dx + \left(\frac{\cos y + 2e^{-x} \cos x}{y}\right)dy = 0$

אינה מדויקת, ופתרו אותה בעזרת גורם האינטגרציה  $ye^x$ .

(3) הראו שהמשוואה  $(x+2)\sin y dx + x \cos y dy = 0$  אינה מדויקת,

ופתרו אותה בעזרת גורם האינטגרציה  $xe^x$ .

פתרו את המשוואות בשאלות 4-9:

$$(x^2 + y^2 + x)dx + (xy)dy = 0 \quad (4)$$

$$(x - x^2 - y^2)dx + ydy = 0 \quad (5)$$

$$(2xy^3 + y^4)dx + (xy^3 - 2)dy = 0 \quad (6)$$

$$(y^2 - y)dx + xdy = 0 \quad (7)$$

$$(y - xy^2)dx + (x + x^2y^2)dy = 0 \quad (8)$$

$$y(1) = -1 ; \quad y' = \frac{3yx^2}{x^3 + 2y^4} \quad (9)$$

(10) נתונה מד"ר לא מדויקת  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ .

א. הוכיחו: אם  $\frac{M_y - N_x}{N} = f(x)$ , אז  $e^{\int f(x)dx}$  הוא גורם אינטגרציה.

ב. הוכיחו: אם  $\frac{M_y - N_x}{M} = g(y)$ , אז  $e^{-\int g(y)dy}$  הוא גורם אינטגרציה.

(11) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית  $(y^4 - 4xy)dx + (2xy^3 - 3x^2)dy = 0$ .

מצאו את גורם האינטגרציה של המשוואה, בהנחה שהוא פונקציה של  $xy$  בלבד. כלומר, גורם האינטגרציה מהצורה  $\mu(xy)$ .

(12) נתונה המשוואה  $(5x^2 + 3y^3 + 2xy)dx + (3x^2 + 3xy^2 + 6y^3)dy = 0$ .

מצאו את גורם האינטגרציה, בהנחה שהוא מהצורה  $\mu(x + y)$ .

(13) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ .

מצאו תנאי על המשוואה, על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה שהוא פונקציה של  $\frac{x}{y}$  בלבד.

(14) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית  $(x^2y^3)dx + (x + xy^2)dy = 0$ .

מצאו את גורם האינטגרציה של המשוואה, בהנחה שהוא פונקציה של  $x^\alpha y^\beta$ . כלומר, גורם אינטגרציה מהצורה  $\mu(x^\alpha y^\beta)$ .

(15) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ .

א. מצאו תנאי על המשוואה, על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה שהוא פונקציה של  $xy$  בלבד.

ב. היעזרו בסעיף א' על מנת למצוא את גורם האינטגרציה של המשוואה  $(y - xy^2 \ln x)dx + xdy = 0$ .

(16) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ .

מצאו תנאי על המשוואה על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה שהוא פונקציה של  $x + y$  בלבד.

## תשובות סופיות

$$0.5x^2 + \frac{y^{-2}}{-2} + \ln|y| = c \quad (1)$$

$$e^x \sin y + 2y \cos x = c \quad (2)$$

$$\sin y \cdot e^x \cdot x^2 = c \quad (3)$$

$$0.25x^4 + 0.5x^2y^2 + \frac{x^3}{3} = c \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) - x = c \quad (5)$$

$$x^2 + xy + \frac{1}{y^2} = c \quad (6)$$

$$x - \frac{x}{y} = c \quad (7)$$

$$-\ln x - \frac{1}{xy} + y = c \quad (8)$$

$$-\frac{x^3}{y} + \frac{2y^3}{3} = \frac{1}{3} \quad (9)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (10)$$

$$\mu(xy) = (xy)^2 \quad (11)$$

$$\mu(x+y) = (x+y)^2 \quad (12)$$

$$\text{if: } \frac{y^2(M_y - N_x)}{yN + xM} = h\left(\frac{x}{y}\right) \quad \text{then: I.F.: } \mu = e^{\int \frac{y^2(M_y - N_x)}{yN + xM}} \quad (13)$$

$$\mu = \frac{1}{xy^3} \quad (14)$$

$$\mu = \frac{1}{x^2y^2} \quad \text{ב.} \quad \text{if: } \frac{M_y - N_x}{yN - xM} = h(xy) \quad \text{then: I.F.: } \mu = e^{\int \frac{M_y - N_x}{yN - xM}} \quad \text{א.} \quad (15)$$

$$\text{if: } \frac{M_y - N_x}{N - M} = h(x+y) \quad \text{then: I.F.: } \mu = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N - M}} \quad (16)$$

## משוואות ליניאריות מסדר ראשון

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x \quad (1)$$

$$xy' = y + x^3 + 3x^2 - 2x \quad (2)$$

$$(x > 2) \quad (x-2)y' = y + 2(x-2)^3 \quad (3)$$

$$(x > 0) \quad x^3 y' + (2 - 3x^2)y = x^3 \quad (4)$$

$$y(0) = 1 ; \quad \frac{dy}{dt} + y = 2 + 2t \quad (5)$$

$$(\sin x > 0) \quad \frac{dy}{dx} + y \cot x = 5e^{\cos x} \quad (6)$$

$$(\sin x > 0) \quad y' - 2y \cot x = 1 \quad (7)$$

$$z(\pi) = 0 ; \quad x^2 z' + 2xz = \cos x \quad (8)$$

$$ydx = (2x + y^3)dy \quad (9)$$

## תשובות סופיות

$$y = 2 + C \cdot e^{-x^2} \quad (1)$$

$$y = x \left[ \frac{x^2}{2} + 3x - 2 \ln x + C \right] \quad (2)$$

$$y = (x-2) \left[ x^2 - 4x + C \right] \quad (3)$$

$$y = \frac{1}{2} x^3 + C \cdot x^3 e^{\frac{1}{x^2}} \quad (4)$$

$$y = 2t + e^{-t} \quad (5)$$

$$y = \frac{1}{\sin x} \left[ -5e^{\cos x} + C \right] \quad (6)$$

$$y = \sin^2 x \left[ -\cot x + C \right] \quad (7)$$

$$z = \frac{\sin x}{x^2} \quad (8)$$

$$x(y) = y^2 (y + c) \quad (9)$$

## משוואות ברנולי

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$x^2 y' + 2xy - y^3 = 0 \quad (1)$$

$$(x^2 + 1)y' - 2xy - y^2 = 0 \quad (2)$$

$$x \frac{dy}{dx} - 2y = x^2 y^{1/2} \quad (3)$$

$$y(1) = 2.5 ; y' - \left( \frac{1}{x} + 5x^4 \right) y = -x^3 y^2 \quad (4)$$

$$(\sin x \neq 0) \quad z' - \cot x \cdot z = \frac{1}{\sin x} z^3 \quad (5)$$

### תשובות סופיות

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{5x} + c \cdot x^4}} \quad (1)$$

$$y = \frac{x^2 + 1}{-x + C} \quad (2)$$

$$y = x^2 \left( \frac{x}{2} + C \right)^2 \quad (3)$$

$$y = \frac{5xe^{x^5}}{e^{x^5} + e} \quad (4)$$

$$z = \pm \sqrt{\frac{\sin^2 x}{\cos x + C}} \quad (5)$$

## משוואות ריקטי

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$y' = e^{2x} + \left(1 + \frac{5}{2}e^x\right)y + y^2 \quad (1)$$

$$y' = 1 + (x - y)^2 \quad (2)$$

$$y' = 1 + x + 2x^2 \cos x - (1 + 4x \cos x)y + 2y^2 \cos x \quad (3)$$

### תשובות סופיות

$$y(x) = -0.5e^x + \frac{e^x}{-\frac{2}{3} + Ce^{-1.5x}} \quad (1)$$

$$y(x) = x + \frac{1}{-x + C} \quad (2)$$

$$y(x) = x + \frac{1}{\cos x - \sin x + Ce^x} \quad (3)$$

## הצבות שונות ומשוונות

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$y' = \cos(y - x) \quad (1)$$

$$y' = \frac{2y}{x} + \cos\left(\frac{y}{x^2}\right); y(1) = 0 \quad (2)$$

$$y' - x^2 y + y^2 = x - \frac{x^4}{4}, y(0) = 1 \quad (3)$$

### תשובות סופיות

$$-\frac{1}{\sin z} + c \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + \sin z}{1 - \sin z}\right) \quad (2)$$

$$y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x+1} \quad (3)$$

## משפט הקיום והיחידות על שם פיאנו ופיקארד

### שאלות

(1) נתונה הבעיה  $y(2) = -1$ ,  $y' = -\frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + y}$ .

א. הוכיחו ש-  $y_1(x) = -x + 1$ ,  $y_2(x) = -\frac{1}{4}x^2$  הם פתרונות לבעיה.

קבעו באיזה תחום תקף כל אחד מהפתרונות.

ב. הסבירו מדוע קיום שני פתרונות לא סותר את משפט היחידות.

(2) נתונה הבעיה  $y(0) = 0$ ,  $y' = \sqrt[3]{y} + 4$ .

א. הוכיחו שהבעיה מקיימת את תנאי משפט הקיום.

ב. הוכיחו שהבעיה אינה מקיימת את תנאי היחידות.

ג. הוכיחו שלבעיה קיים פתרון יחיד, ומצאו אותו.

(3) פתרו את הבעיה  $y(4) = 0$ ,  $y' = (x^2 + y^2) \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) + x^2 \sin y$ .

(4) נתונה הבעיה  $y(0) = 4$ ,  $y' = (y-1)(x^2 + y)^5$ .

א. הראו שכל פתרון של הבעיה בהכרח חסום מלמטה.

ב. הראו שכל פתרון של הבעיה בהכרח עולה בתחום הגדרתו.

(5) נתונה המד"ר  $ydx = (2x + y^3)dy$ .

א. הראו שעבור  $x = x(y)$  המד"ר ליניארית מסדר ראשון,

ופתרו אותה ככזאת.

ב. קבעו, על פי משפט הקיום והיחידות למד"ר ליניארית,

מהן נקודות ההתחלה  $(x_0, y_0)$ , כך שלמד"ר הנתונה קיים פתרון יחיד,

העובר דרך  $(x_0, y_0)$ .

צטטו את המשפט עבור המד"ר הליניארית שקיבלתם.

מהו הקטע הארוך ביותר שבו קיים פתרון יחיד העובר דרך  $(x_0, y_0)$ ?

$$(6) \quad \begin{cases} y' = 2xy \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad \text{נתונה בעיית ההתחלה}$$

- א. מצאו 3 קירובי פיקארד לפתרון הבעיה.  
 ב. מצאו צורה כללית לקירוב פיקארד מסדר  $n$  (הוכיחו באינדוקציה).  
 ג. פתרו את המד"ר ישירות, והראו כי קירוב פיקארד מסדר  $n$  מתכנס לפתרון כאשר  $n \rightarrow \infty$ .

$$(7) \quad \begin{cases} y' = \frac{1}{x} |\sin y| \\ y(1) = \pi \end{cases} \quad \text{כמה פתרונות יש לבעיית ההתחלה} \quad (x > 0) ?$$

$$(8) \quad \begin{cases} y' = 5 + 5y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad \text{נתונה בעיית ההתחלה}$$

- א. מצאו קטע כלשהו שבו לבעיה קיים פתרון יחיד.  
 ב. מצאו את הקטע הגדול ביותר, שבו משפט הקיום והיחידות יודע להגיד שקיים פתרון יחיד.  
 ג. הראו, על ידי חישוב ישיר, שקיים קטע גדול יותר מהקטע שנמצא בסעיף ב', בו קיים לבעיה פתרון יחיד.

$$(9) \quad \begin{cases} y' = -\frac{x}{y} \quad (y > 0) \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad \text{נתונה בעיית ההתחלה}$$

- א. מצאו קטע כלשהו שבו לבעיה קיים פתרון יחיד.  
 ב. מצאו את הקטע הגדול ביותר, שבו משפט הקיום והיחידות יודע להגיד שקיים פתרון יחיד.  
 ג. הראו, על ידי חישוב ישיר, שקיים קטע גדול יותר מהקטע שנמצא בסעיף ב', בו קיים לבעיה פתרון יחיד.

$$(10) \quad \begin{cases} y' = x + \sin y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{הראו כי לבעיה יש פתרון יחיד על כל הישר הממשי.}$$

$$(11) \quad \begin{cases} y' = x \cdot \sin xy \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{הראו כי לבעיה יש פתרון יחיד על כל הישר הממשי.}$$

$$(12) \quad \begin{cases} y' = xye^{-y^2} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{הראו כי לבעיה יש פתרון יחיד על כל הישר הממשי.}$$

## תשובות סופיות

- (1) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הסבר.
- (2) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. שאלת הוכחה.
- (3)  $y(x) = 0$
- (4) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה.
- (5) א. ראו שאלה אחרונה בנושא 'מד"ר ליניארית מסדר ראשון'.  
ב. כל נקודת התחלה  $(x_0, y_0)$ , שעבורה  $y_0 \neq 0$ .  
הקטע הארוך ביותר:  $(0, \infty)$  או  $(-\infty, 0)$ .
- (6) א.  $y_0(x) = 1, y_1(x) = 1 + x^2, y_2(x) = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!}, y_3(x) = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!}$   
ב.  $y_n(x) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \dots + \frac{x^{2n}}{n!}$ . ג. הוכחה.
- (7) אחד.
- (8) א.  $[-0.08, 0.08]$  ב.  $[-0.1, 0.1]$  ג. הוכחה.
- (9) א.  $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$  ב.  $[-0.5, 0.5]$  ג. הוכחה.
- (10) הוכחה.
- (11) הוכחה.
- (12) הוכחה.

## פתרונות גרפיים ונומריים למשוואה מסדר ראשון

### שאלות

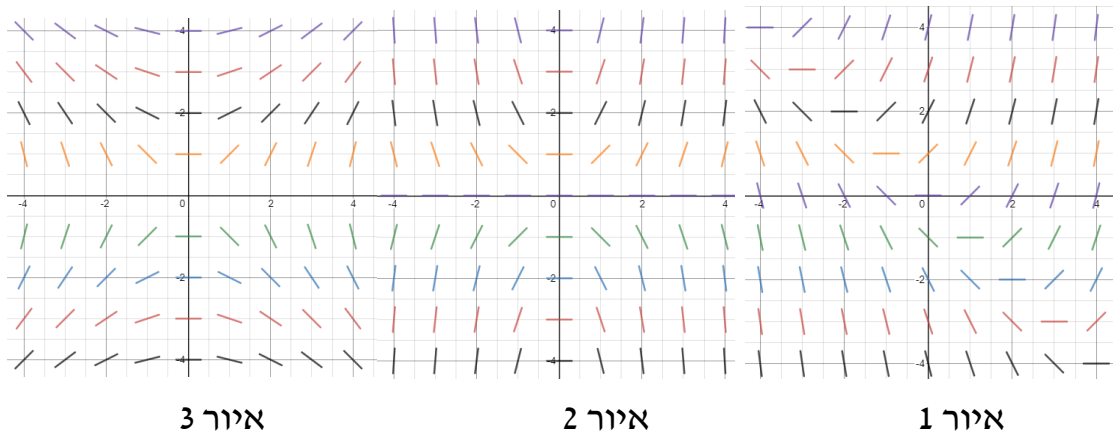
(1) שרטטו שדה כיוונים למשוואה הדיפרנציאלית  $y' = 2y - x$ .

(2) התאימו כל אחת מהמשוואות שבסעיפים א'-ג' לשדה הכיוונים שלה:

א.  $y' = \frac{x}{y}$

ב.  $y' = xy$

ג.  $y' = x + y$



(3) נתונה המד"ר  $y' = y - x$ ,  $y(0) = 2$ .

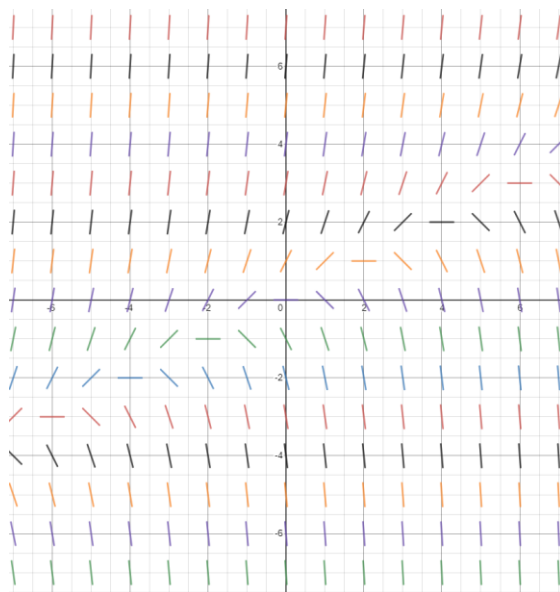
מצאו בקירוב את  $y(1)$  בעזרת שיטת אוילר עם  $h = 0.1$ .

(4) נתונה המד"ר  $y' = x + y$ ,  $y(1) = 2$ .

מצאו בקירוב את  $y(2)$  בעזרת שיטת אוילר עם  $h = 0.2$ .

## תשובות סופיות

(1)



(2) איור 1 – סעיף ג', איור 2 – סעיף ב', איור 3 – סעיף א'.

(3)  $y(1) = 4.593$

(4)  $y(2) = 6.95328$

## משוואות מסדר ראשון וממעלה גבוהה

הערה: נושא זה לא נלמד בדרך כלל; בדקו עם המרצה אם הוא נדרש או לא.

הערת סימון: בתת-פרק זה נסמן  $p = y' = \frac{dy}{dx}$ .

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

$$(p = y') \quad 4x^2 p^2 - 4x^2 p - 2xy - y^2 = 0 \quad (1)$$

$$(p = y') \quad x^2 p^2 + xyp - 6y^2 = 0 \quad (2)$$

$$(p = y') \quad xyp^2 + (x^2 + xy + y^2)p + x^2 + xy = 0 \quad (3)$$

$$(p = y') \quad y = 2px + p^4 x^2 \quad (4)$$

$$(p = y') \quad xp^2 - 2yp + 4x = 0 \quad (5)$$

$$(p = y') \quad (y > 0) \quad 6p^2 y^2 + 3px - y = 0 \quad (6)$$

## תשובות סופיות

$$(y - 2x - \sqrt{x} \cdot c_1) \cdot \left( \ln|y| + \frac{1}{2} \ln|x| - c_2 \right) = 0 \quad (1)$$

$$(\ln|y| - 2\ln|x| - c_1) \cdot (\ln|y| + 3\ln|x| - c_2) = 0 \quad (2)$$

$$\left( y + 0.5x - \frac{c_1}{x} \right) \cdot \left( \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} - c_2 \right) = 0, \quad x > 0 \quad (3)$$

$$y = \pm 2\sqrt{cx} + c^2 \quad (4)$$

$$y = \frac{1}{2}cx^2 + \frac{2}{c} \quad (5)$$

$$6\left(\frac{c}{y^2}\right)^2 y^2 + 3\left(\frac{c}{y^2}\right)x - y = 0 \quad (6)$$

# שיטות מתמטיות

פרק 14 - מד"ר - פתרון משוואות ליניאריות באמצעות טורים

תוכן העניינים

1. פתרון מדר בעזרת טורים - נקודה רגולרית ..... 162
2. פתרון מדר בעזרת טורים - נקודה רגולרית-סינגולרית ..... 164
3. נוסחאות - טורי מקלורן של פונקציות חשובות ..... 166

## פתרון מדר בעזרת טורים – נקודה רגולרית

בסוף ספר הפרק יש דף נוסחאות לטורי מקלורן של פונקציות חשובות.

### שאלות

פתרו את המשוואות בשאלות 1-7 על ידי פיתוח הפתרון לטור חזקות סביב  $x=0$ .  
במיוחד, רשמו נוסחה רקורסיבית (נוסחת נסיגה) עבור האיבר הכללי,  
וציינו את ארבעת האיברים הראשונים בפיתוח של הטור.

**תזכורת:** טור חזקות סביב  $x=0$  שקול לטור טיילור סביב  $x=0$  ושקול לטור מקלורן.

$$y(0)=3, \quad y'(0)=12; \quad y''-2x^2y'+4xy=x^2+2x+2 \quad (1)$$

$$y(0)=1, \quad y'(0)=2; \quad y''-xy=0 \quad (2)$$

$$(1-x^2)y''-2xy'+2y=0 \quad (3)$$

$$(x^2+4)y''+xy=x+2 \quad (4)$$

$$y''+(x-1)y'+(2x-3)y=0 \quad (5)$$

$$y(0)=a_0=1, \quad y'(0)=a_1=2; \quad y''+ty=e^{t+1} \quad (6)$$

$$y''+(t-1)y'+(2t-3)y=0 \quad (\text{השתמש בפתרון בסימן } \Sigma) \quad (7)$$

$$y(1)=1, \quad y'(1)=2; \quad y''(x)+(x-1)y(x)=e^x \quad (8)$$

פתרו את המשוואה  
על ידי פיתוח הפתרון לטור חזקות סביב  $x=1$ .

$$y(-1)=2, \quad y'(-1)=-2; \quad y''+xy'+(2x-1)y=0 \quad (9)$$

פתרו את המשוואה  
רמז: תנאי ההתחלה מרמז על כך שכדאי לפתח את הפתרון לטור חזקות סביב  $x=-1$ .

## תשובות סופיות

$$a_n = \frac{2n-10}{(n-1)n} a_{n-3} \quad (n \geq 5) \quad , \quad y = 3 + 12x + x^2 - \frac{5}{3}x^3 - \frac{23}{12}x^4 + \dots + a_n x^n \dots \quad (1)$$

$$a_n = \frac{1}{(n-1)n} a_{n-3} \quad (n \geq 3) \quad , \quad y = 1 + 2x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (2)$$

$$a_n = \frac{n-3}{n-1} a_{n-2} \quad (n \geq 2) \quad , \quad y = a_0 + a_1 x + -a_0 x^2 + 0x^3 - \frac{1}{3}a_0 x^4 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (3)$$

$$y = a_0 + a_1 x + \frac{1}{4}x^2 + \left(\frac{1-a_0}{24}\right)x^3 + \left(\frac{-1}{48}a_1 - \frac{1}{96}\right)x^4 + \dots + a_n x^n \quad (4)$$

$$a_n = \frac{-1}{4(n-1)n} a_{n-3} - \frac{(n-2)(n-3)}{4(n-1)n} a_{n-2} \quad , \quad (n \geq 4)$$

$$y = a_0 + a_1 x + \left(\frac{1}{2}a_1 + \frac{3}{2}a_0\right)x^2 + \left(\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{6}a_0\right)x^3 + \frac{1}{6}a_0 x^4 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (5)$$

$$a_n = \frac{1}{n} a_{n-1} - \frac{n-5}{n(n-1)} a_{n-2} - \frac{2}{n(n-1)} a_{n-3} \quad (n \geq 3)$$

$$y(t) = 1 + 2t + \frac{e}{2}t^2 + \frac{e-1}{6}t^3 + \frac{e-4}{24}t^4 + \dots + a_n t^n + \dots \quad (6)$$

$$a_n = \frac{e}{n(n-1)(n-2)!} - \frac{a_{n-3}}{n(n-1)} \quad (n \geq 3)$$

$$y = a_0 + a_1 t + \left(\frac{1}{2}a_1 + \frac{3}{2}a_0\right)t^2 + \left(\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{6}a_0\right)t^3 + \frac{1}{6}a_0 t^4 + \dots + a_n t^n + \dots \quad (7)$$

$$a_n = \frac{1}{n} a_{n-1} - \frac{n-5}{n(n-1)} a_{n-2} - \frac{2}{n(n-1)} a_{n-3} \quad (n \geq 3)$$

$$y = 1 + 2(x-1) + \frac{e}{2}(x-1)^2 + \frac{e-1}{6}(x-1)^3 + \frac{e-4}{24}(x-1)^4 + \dots + a_n (x-1)^n + \dots \quad (8)$$

$$a_n = \frac{e - a_{n-3}(n-2)!}{n!} \quad (n \geq 3)$$

$$y = 2 - 2(x+1) + 2(x+1)^2 - \frac{2}{3}(x+1)^3 + \frac{1}{3}(x+1)^4 + \dots \quad (9)$$

$$a_n = \frac{1}{n} a_{n-1} - \frac{n-5}{n(n-1)} a_{n-2} - \frac{2}{n(n-1)} a_{n-3} \quad (n \geq 3)$$

## פתרון מדר בעזרת טורים – נקודה רגולרית-סינגולרית

### שאלות

עבור כל אחת מהמשוואות הבאות הראו שהנקודה היא נקודה סינגולרית רגולרית, ופתרו את המשוואה על ידי פיתוח המשוואה לטור חזקות בסביבות הנקודה.

$$3x^2y'' + 2xy' + x^2y = 0 \quad (1)$$

$$2x^2y'' + 7x(x+1)y' - 3y = 0 \quad (2)$$

$$2x^2y'' - xy' + (x-5)y = 0 \quad (3)$$

$$3x^2y'' - xy' + y = 0 \quad (4)$$

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0 \quad (5)$$

$$x^2y'' - xy' + y = 0 \quad (6)$$

$$x^2y'' + x(x+2)y' - 2y = 0 \quad (7)$$

$$x^2y'' + x(x-2)y' + 2y = 0 \quad (8)$$

### הערות

בשאלות 2-5, הפתרונות של המשוואה האינדיציאלית שונים והפרשם אינו מספר שלם. בשאלות 6 ו-7 הפתרונות שווים, ובשאלות 8 ו-9 הפתרונות שונים והפרשם מספר שלם.

## תשובות סופיות

$$y = k_1 x^{1/3} \left( 1 - \frac{1}{14} x^2 + \frac{1}{728} x^4 + \dots \right) + k_2 \left( 1 - \frac{1}{10} x^2 + \frac{1}{440} x^4 + \dots \right) \quad (1)$$

$$y = k_1 x^{1/2} \left( 1 - \frac{7}{18} x^1 + \frac{147}{792} x^2 + \dots \right) + k_2 x^{-3} \left( 1 - \frac{21}{5} x^1 + \frac{49}{5} x^2 - \frac{343}{15} x^3 \right) \quad (2)$$

$$y = k_1 x^{-1} \left( 1 + \frac{1}{5} x + \frac{1}{30} x^2 + \frac{1}{90} x^3 + \dots \right) + k_2 x^{2.5} \left( 1 - \frac{1}{9} x + \frac{1}{198} x^2 - \frac{1}{7722} x^3 + \dots \right) \quad (3)$$

$$y = k_1 x + k_2 x^{1/3} \quad (4)$$

$$y = k_1 \left( 1 - \frac{1}{2^2} x^2 + \frac{1}{4^2 \cdot 2^2} x^4 + \dots \right) + k_2 \left[ \ln x \cdot \left( 1 - \frac{1}{2^2} x^2 + \frac{1}{4^2 \cdot 2^2} x^4 + \dots \right) + \left( \frac{2}{2^3} x^2 + \frac{-12}{4^3 \cdot 2^3} x^4 + \dots \right) \right] \quad (5)$$

$$y(x) = k_1 x + k_2 x \ln x \quad (6)$$

$$y(x) = \frac{k_1}{x^2} \left( 1 - x + \frac{1}{2} x^2 - e^{-x} \right) + \frac{k_2}{x^2} e^{-x} \quad (7)$$

$$y = -a_0 x^2 \ln x \left( 1 - x + \frac{1}{2} x^2 + \dots \right) + a_0 x \left( 1 - x^2 - \frac{3}{4} x^3 + \dots \right) \quad (8)$$

## נוסחאות – טורי מקלורן של פונקציות חשובות

| <u>טור מקלורן</u>                                                                                                                                           | <u>תחום התכנסות</u>                                                                                                                    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$                                                   | $-\infty < x < \infty$                                                                                                                 |
| $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$                               | $-\infty < x < \infty$                                                                                                                 |
| $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$                                   | $-\infty < x < \infty$                                                                                                                 |
| $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$                                     | $-1 < x \leq 1$                                                                                                                        |
| $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$                                  | $-1 \leq x \leq 1$                                                                                                                     |
| $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$                                                                                       | $-1 < x < 1$                                                                                                                           |
| $(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-n+1)}{n!} x^n$ $= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots$ | $-1 \leq x \leq 1 \quad (m > 0)$<br>$-1 < x \leq 1 \quad (-1 < m < 0)$<br>$-1 < x < 1 \quad (m \leq -1)$<br>$m \neq 0, 1, 2, 3, \dots$ |

# שיטות מתמטיות

פרק 15 - מד"ר - בעיות שטורם ליוביל

תוכן העניינים

1. בעיות שטורם ליוביל.....167

## בעיות שטורם-ליוביל

## שאלות

(1) הביאו כל אחת מהמשוואות הבאות לתבנית

$$\cdot (p(x)y'(x))' + (\lambda r(x) - q(x))y(x) = 0$$

א.  $y'' - 2xy' + \lambda y = 0$  (משוואת הרמיט)

ב.  $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \lambda)y = 0$  (משוואת בסל)

(2) הראו שהבעיה הבאה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית:

$$\begin{cases} e^{2x} y'' + e^{2x} y' + \lambda y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) + 4y'(0) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

(3) הראו שהבעיה הבאה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית:

$$\begin{cases} (x+2)y'' + 4y' + xy + \lambda e^x y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

פתרו את בעיות שטורם-ליוביל בשאלות 4-7:

(עבור כל בעיה יש למצוא ערכים עצמיים ופונקציות עצמיות)

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < \pi \\ y(0) - y'(0) = 0 \\ y(\pi) - y'(\pi) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < 1 \\ y'(0) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) + y'(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) = 0 \\ y(1) + y'(1) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$(8) \quad \begin{cases} y'' - 2y' + (1 + \lambda)y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases} \quad \text{נתונה הבעיה הבאה:}$$

- א. הוכיחו שהבעיה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית.  
 ב. פתרו את הבעיה.

(9) פתרו את בעיית שטורם-ליוביל הבאה:

$$א. \quad \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < \ell \\ y(0) = 0 \\ y'(\ell) = 0 \end{cases}$$

$$ב. \quad \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases} \quad \text{נציב } \ell = 1 \text{ בבעיה מסעיף א', ונקבל:}$$

1. פתחו את הפונקציה  $f(x) = 1, 0 \leq x \leq 1$

לטור פונקציות עצמיות של בעיית שטורם-ליוביל זו.

התחל את הטור מ- $n=1$ .

2. מה סכום הטור ב- $x=0$ ?

האם הוא שווה לערך הפונקציה ב- $x=0$ ?

$$ג. \quad \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < 2 \\ y(0) = 0 \\ y'(2) = 0 \end{cases} \quad \text{נציב } \ell = 2 \text{ בבעיה מסעיף א', ונקבל:}$$

פתחו את הפונקציה  $f(x) = x, 0 \leq x \leq 2$

לטור פונקציות עצמיות של בעיית שטורם-ליוביל זו.

(10) פתרו את בעיית שטורם-ליוביל הבאה:

$$א. \quad \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < \pi \\ y'(0) = 0 \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$$

ב. פתחו את הפונקציה  $f(x) = e^x, 0 \leq x \leq \pi$

לטור פונקציות עצמיות של הבעיה מסעיף א.

התחילו את הטור מ- $n=1$ .

$$(11) \text{ נתונה הבעיה: } \begin{cases} x^2 y'' + xy' + \lambda y = 0, & 0 < x < e \\ y(1) = 0 \\ y'(e) = 0 \end{cases}$$

- א. הוכיחו שהבעיה הנתונה היא אכן בעיית שטורם-ליוביל רגולרית.  
 ב. מצאו את הערכים עצמיים והפונקציות העצמיות של הבעיה.  
 ג. הראו שהפונקציות העצמיות אורתוגונליות ביחס לפונקציית המשקל של הבעיה.

ד. פתחו את  $f(x) = \begin{cases} 1 & 1 \leq x \leq \sqrt{e} \\ 0 & \sqrt{e} \leq x \leq e \end{cases}$  , לטור פונקציות עצמיות.

- הראו שסכום הטור וערך הפונקציה עבור  $x=1$  שונים.  
 ה. חשבו את סכום הטור מסעיף ד', עבור  $x = \sqrt{e}$ ,  $x = 1.5$ ,  $x = 2$ .

**זהויות שכדאי להכיר:**

$$\begin{aligned} \sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) &= \cos(\pi n) = (-1)^n \\ \sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) &= \sin(\pi n) = 0 \\ n &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

## תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } (e^{-x^2} y')' + (\lambda e^{-x^2} - 0)y = 0 \quad \text{ב. } (xy')' + \left( \lambda \left( -\frac{1}{x} \right) - (-x) \right) y = 0$$

(2) שאלת הוכחה.

(3) שאלת הוכחה.

$$(4) \quad \text{פונקציות עצמיות : } \varphi_n(x) = \cos(n\pi x), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{ערכים עצמיים : } \lambda_n = (\omega_n)^2 = (n\pi)^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$(5) \quad \text{פונקציות עצמיות : } \phi_n(x) = n \cos nx + \sin nx \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{ערכים עצמיים : } \lambda_n = n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots; \text{ בנוסף, } \lambda = -1 \text{ הוא עי"ע של הבעיה,}$$

$$\text{המתאים לפונקציה העצמית } \varphi(x) = e^x.$$

$$(6) \quad \text{פונקציות עצמיות : } \varphi_n(x) = \sin(\omega_n x), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{ערכים עצמיים : } \lambda_n = (\omega_n)^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$(7) \quad \text{פונקציות עצמיות : } y_n(x) = \sin(\omega_n x) - \omega_n \cos(\omega_n x) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{ערכים עצמיים : } \lambda_n = (\omega_n)^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{בנוסף, } \lambda_0 = 0 \text{ הוא עי"ע של הבעיה, המתאים לפונקציה העצמית } \varphi(x) = x - 1.$$

$$(8) \quad \text{א. שאלת הוכחה. ב. פונקציות עצמיות : } \varphi_n(x) = e^x \sin n\pi x, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{ערכים עצמיים : } \lambda_n = (\omega_n)^2 = (n\pi)^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$(9) \quad \text{א. פונקציות עצמיות : } \varphi_n(x) \sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2l}x\right) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{ערכים עצמיים : } \lambda_n = (\omega_n)^2 = \left((2n+1)\frac{\pi}{2l}\right)^2 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{ב. סכום הטור ב- } x=0 \text{ הוא } 0, \text{ והוא אינו שווה לערך הפונקציה ב- } x=0.$$

$$\text{ג. } (0 < x < 2) \text{ כאשר, } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \varphi_n x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16(-1)^n}{\pi^2 (2n+1)^2} \sin\left((2n+1)\frac{\pi}{4}x\right).$$

$$(10) \quad \text{א. פונקציות עצמיות : } \varphi_n(x) = \cos \frac{2n+1}{2} x \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{ערכים עצמיים : } \lambda_n = (\omega_n)^2 = \left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{ב. } 0 < x < \pi \text{ כאשר, } e^x = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\pi \left(n - \frac{1}{2}\right)} (-1)^{n+1} - 1}{1^2 + \left(n - \frac{1}{2}\right)^2} \cos\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)x\right).$$

11) א. שאלת הוכחה.

ב. פונקציות עצמיות :  $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\varphi_n(x) = \sin\left(\left(\frac{1}{2} + n\right)\pi \ln x\right)$$

ערכים עצמיים :  $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\lambda_n = \pi^2 \left(\frac{1}{2} + n\right)^2$$

ג. שאלת הוכחה.

ד.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 - 2 \cos\left(\left(\frac{1}{2} + n\right)\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2} + n\right)\pi} \sin\left(\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) \ln x\right)$$

ה. סכום הטור ב-  $x = \sqrt{e}$  הוא  $\frac{1}{2}$  ; ב-  $x = 1.5$  הוא 1 ; וב-  $x = 2$  הוא 0.

# שיטות מתמטיות

פרק 16 - מד"ח - משוואת הגלים

תוכן העניינים

1. קטע אינסופי ..... (ללא ספר)
2. קטע חצי אינסופי ..... (ללא ספר)
3. הפרדת משתנים עבור משוואה הומוגנית ..... (ללא ספר)
4. הפרדת משתנים עבור משוואה לא הומוגנית ..... (ללא ספר)
5. משולש הקביעה ..... (ללא ספר)
6. עקרון דוהמל ..... (ללא ספר)

# שיטות מתמטיות

פרק 17 - מד"ח - משוואת החום

תוכן העניינים

1. נוסחת פוואסון בקטע אינסופי ..... (ללא ספר)
2. הפרדת משתנים בקטע סופי ..... (ללא ספר)
3. עקרון דוהמל ..... (ללא ספר)
4. עקרון המקסימום והמינימום ..... (ללא ספר)

# שיטות מתמטיות

פרק 18 - מד"ח - משוואת לפלס

תוכן העניינים

1. חזרה על אינטגרל קווי ..... (ללא ספר)
2. משוואת לפלס בעיגול ..... (ללא ספר)
3. משוואת לפלס בטבעת ..... (ללא ספר)
4. משוואת לפלס בגזרה מעגלית ..... (ללא ספר)
5. משוואת לפלס במלבן ..... (ללא ספר)
6. עקרון הממוצע ..... (ללא ספר)
7. עקרון המקסימום והמינימום ..... (ללא ספר)

# שיטות מתמטיות

פרק 19 - שאלות מסכמות ברמת בחינה בפונקציות מרוכבות

תוכן העניינים

1. תרגילים.....172

## שאלות מסכמות ברמת בחינה:

### שאלות:

(1) האם קיימת  $f$  אנליטית ב-  $B_1(0) = \{z \mid |z| < 1\}$  כך ש-  $|f(z)| = \ln(2 + |z|)$  לכל  $z \in B_1(0)$ ?

(2) נניח כי  $f(z)$  אנליטית בטבעת  $0 < |z| < \infty$  ונניח כי קיים מספר  $\alpha$  ממשי שאינו שלם כך שלכל  $R > 0$  מתקיים:  $\int_0^{2\pi} |f(Re^{i\theta})| d\theta \leq 2\pi R^\alpha$ . הוכיחו כי:  $f(z) = 0$  בטבעת.

(3) הוכח / הפרך:

קיימת פונקציה  $f(z)$  אנליטית ב-  $B_{1+\varepsilon}(0)$  כך ש-  $f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}$  לכל  $n \in \mathbb{N}$ .

(4) הראו כי הטור:  $\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{e^z - i}{e^z + i} \right)^n$  מתכנס בהחלט ברצועה:  $U = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Im}(z) < \pi\}$ .

(5) נניח כי:  $f = u + iv$  שלמה כך ש-  $v(x, y) = \cosh[u(x, y)]$ . הוכיחו כי  $f(z)$  קבועה.

(6) הוכח / הפרך:

קיימת סדרה:  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $a_n \in \mathbb{C}$ ,  $a_n \neq 0$  כך ש-  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$  ו-  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^n a_n}{(2k+1)^n} = 0$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ .

(7) הוכיחו כי לכל  $t \in \mathbb{R}$  מתקיים:  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{2t \cos(\theta)} d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(n!)^2}$ .

(8) נניח כי  $f(z)$  אנליטית ב- $B_1(0)$ . הוכיחו כי קיים  $n \in \mathbb{N}$  כך ש- $\frac{1}{n+2} \neq f\left(\frac{1}{n}\right)$ .

(9) חשבו את האינטגרל:  $\int_0^\infty \frac{1}{x^3+1} dx$ .

(10) הוכח / הפרד:

קיימת פונקציה שלמה  $f(z)$  כך ש- $|z^2 \cdot f(z) + e^z| \leq 1$  לכל  $|z| < 1$ .

(11) נניח כי  $f(z)$  אנליטית בטבעת  $0 < |z| < 2$  כך שלכל  $n \geq 0$  מתקיים:

$$\oint_{|z|=1} z^n f(z) dz = 0 \quad \lim_{z \rightarrow 0} f(z) \text{ קיים וסופי.}$$

(12) הוכח / הפרד:

קיימת פונקציה שלמה  $f(z)$  כך ש- $\frac{(-1)^n}{n} = f\left(\frac{1}{n}\right)$  לכל  $n \in \mathbb{N}$ .

(13) האם קיימת  $f$  שלמה המקיימת:

$$f(x) = \begin{cases} x^4 & x \in \mathbb{R}, x > 0 \\ -x^4 & x \in \mathbb{R}, x < 0 \end{cases}$$

(14) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הראו כי:  $\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]}} |\operatorname{Log}(z)| = \infty$

ב. הראו כי:  $\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]}} |z \cdot \operatorname{Log}(z)| = 0$

ג. האם הפונקציה:  $f(z) = \begin{cases} z \cdot \operatorname{Log}(z) & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$  אנליטית ב- $z=0$ ?

(15) חשבו את האינטגרל:  $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx$

(16) פתחו את הפונקציה:  $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^4}$  לטור לורן בטבעת  $0 < |z-i| < 2$ .

(17) נתון כי  $f(z)$  אנליטית בטבעת  $0 < |z| < 1$  וזוגית (כלומר:  $f(z) = f(-z)$ ).

חשבו:  $\oint_{|z|=\frac{1}{2}} f(z) dz$ .

(18) נניח כי  $f(z)$  אנליטית ב- $B_1(0)$ . הוכיחו כי קיים  $n \in \mathbb{N}$  כך ש-

$$f\left(\frac{1}{n}\right) \cdot f\left(\frac{1}{n+1}\right) \neq \frac{1}{n}$$

(19) תהי:  $f: B_1(0) \rightarrow \mathbb{C}$  לאו דווקא רציפה.

נניח כי:  $f^2(z)$  ו- $f^3(z)$  אנליטיות ב- $B_1(0)$ .

הוכיחו כי  $f(z)$  אנליטית ב- $B_1(0)$ .

(20) הוכח / הפרד:

אם:  $f: B_1(0) \rightarrow \mathbb{C}$  לאו דווקא רציפה ו- $f^2(z)$  ו- $f^6(z)$  אנליטיות ב- $B_1(0)$

אז  $f(z)$  בהכרח אנליטית ב- $B_1(0)$ .

## תשובות סופיות:

(1) לא.

(2) הוכחה.

(3) הוכחה.

(4) הוכחה.

(5) הוכחה.

(6) הוכחה.

(7) הוכחה.

(8) הוכחה.

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^3+1} dx = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)} \quad (9)$$

(10) הוכחה.

(11) הוכחה.

(12) הוכחה.

(13) לא קיימת.

(14) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. לא.

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \quad (15)$$

$$a_k = \begin{cases} (-1)^{k+4} \frac{(k+7)(k+6)(k+5)}{6(2i)^{k+8}} & k \geq -4 \\ 0 & k \leq -5 \end{cases} \quad (16)$$

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}} f(z) dz = 2\pi i \cdot \text{Res}[f(z), 0] = 0 \quad (17)$$

(18) הוכחה.

(19) הוכחה.

(20) הוכחה.

# שיטות מתמטיות

פרק 20 - שאלות מסכמות ברמת בחינה במד"ח

תוכן העניינים

1. תרגילים ..... (ללא ספר)

# שיטות מתמטיות

פרק 21 - שאלות מסכמות ברמת בחינה באנליזת פורייה

תוכן העניינים

1. תרגילים ..... (ללא ספר)